



**UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO (I.I.P.)**

**ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL MODELACIÓN Y  
SIMULACIÓN NUMÉRICA**

**GUILLERMO ALEXIS ALBUJA PROAÑO**

**TUTOR ROLANDO SÁENZ ANDRADE**

**Trabajo presentado como requisito parcial para la obtención del grado de:**

**MAGÍSTER EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA**

**Quito Ecuador**

**2013**



## **DEDICATORIA**

Dedico esta tesis a todos aquellos que creyeron en mí.

A mi esposa, Carlita, quien me brindó su amor, su cariño, y su apoyo constante. Su comprensión y paciente espera para que pudiera terminar esta maestría son evidencia su gran amor. ¡Gracias!

A mis adoradas hijas Alexa y Doménica, que espero les muestre que con trabajo y disciplina todo es posible, estoy convencido que independientemente del camino que escojan llegarán mucho más lejos que su padre.

A mis padres, Ángel y Judith quienes me enseñaron desde pequeño a luchar para alcanzar mis metas. Mi triunfo es el de ustedes, ¡los amo!

A mí querida hermana, Silvana aunque este lejos su apoyo siempre fue importante

Gracias! Sin ustedes no hubiese podido hacer realidad este sueño.

**Guillermo Alexis Albuja Proaño**



## **AGRADECIMIENTOS**

A mi tutor de tesis, Dr. Rolando Sáenz por haber confiado en mi persona, por la paciencia y la dirección de este trabajo.

A mi amigo y maestro Dr. Hernán Benalcázar por compartir sus conocimientos y experiencia, sin su apoyo desinteresado no hubiese sido posible concluir este trabajo.

**Guillermo Alexis Albuja Proaño**



## AUTORIZACIÓN DE LA AUTORÍA INTELECTUAL

Yo ALBUJA PROAÑO GUILLERMO ALEXIS en calidad de autor del trabajo de tesis realizada sobre ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL MODELACIÓN Y SIMULACIÓN NUMÉRICA, por la presente autorizo a la UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR, hacer uso de todos los contenidos que me pertenecen o de parte de los que contienen esta obra, con fines estrictamente académicos o de investigación.

Los derechos que como autor me corresponden, con excepción de la presente autorización, seguirán vigentes a mi favor, de conformidad con lo establecido en los artículos 5,6,8,19 y demás pertinentes a Ley de Propiedad Intelectual y su Reglamento

Quito a 11 de noviembre de 2013

Guillermo Alexis Albuja Proaño

C.C 1712454063



## **CERTIFICACIÓN**

**Certifico que el presente trabajo fue realizado en su totalidad por el Sr. GUILLERMO ALEXIS ALBUJA PROAÑO como requisito parcial para la obtención del título de MAGISTER EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA**

Quito a 11 de noviembre de 2013

**Dr. Rolando Sáenz Andrade**

# CONTENIDO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>X</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>XII</b>
<b>1. ASPECTOS GENERALES</b>	<b>1</b>
1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	1
1.2. METODOLOGÍA PROPUESTA . . . . .	3
1.2.1. Estructuración del problema . . . . .	3
1.2.2. Desarrollo del modelo matemático . . . . .	3
1.2.3. Resolución del conjunto de ecuaciones . . . . .	4
1.2.4. Análisis de los resultados . . . . .	5
1.3. JUSTIFICACIÓN . . . . .	6
1.4. OBJETIVOS . . . . .	6
1.4.1. Objetivos Generales . . . . .	6
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	7

<b>2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS</b>	<b>8</b>
2.1. RESEÑA HISTÓRICA . . . . .	8
2.2. FORMACIONES GEOLÓGICAS Y SU COMPORTAMIENTO FRENTE AL AGUA . . . . .	9
2.3. TIPOS DE SUELO . . . . .	10
2.3.1. Suelos arcillosos . . . . .	12
2.3.2. Suelos arenosos . . . . .	12
2.3.3. Suelos limosos . . . . .	13
2.4. APLICACIONES . . . . .	13
<b>3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN</b>	<b>15</b>
3.1. LEY DE DARCY . . . . .	15
3.1.1. El experimento de Darcy . . . . .	15
3.1.2. Ley de Darcy en tres dimensiones . . . . .	17
3.1.3. Ley de Darcy-Buckingham . . . . .	18
3.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD . . . . .	18
3.3. ECUACIÓN DE RICHARDS . . . . .	27
3.3.1. Condiciones Iniciales y de Frontera . . . . .	27
<b>4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD</b>	<b>29</b>
4.1. MARCO TEÓRICO . . . . .	29
4.1.1. Espacios Funcionales . . . . .	29

4.2.	FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA . . . . .	47
4.2.1.	Ecuación tipo elíptica no lineal . . . . .	47
4.2.2.	Ecuación del tipo parabólico no lineal . . . . .	50
4.3.	EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DÉBIL . . . . .	52
<b>5.</b>	<b>DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D</b>	<b>68</b>
5.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	68
5.2.	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS . . . . .	68
5.2.1.	Breve reseña histórica . . . . .	69
5.2.2.	Descripción matemática del método . . . . .	72
5.3.	MODELO NUMÉRICO . . . . .	77
5.3.1.	Método de Newton para la ecuación tipo elíptico no lineal . . .	77
5.3.2.	Método de Newton y discretización espacial para la ecuación del tipo elíptico no lineal . . . . .	79
5.3.3.	Discretización espacial y temporal de la ecuación del tipo parabólico no lineal . . . . .	85
<b>6.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL</b>	<b>90</b>
6.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	90
6.2.	MALLA . . . . .	91



6.3. PROGRAMACIÓN DEL M.E.F. PARA LA ECUACIÓN DE RICHARDS . . . . .	93
6.4. VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS . . . . .	97
<b>7. RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>103</b>
<b>8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>107</b>
8.1. CONCLUSIONES . . . . .	107
8.2. RECOMENDACIONES . . . . .	108
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>110</b>

# LISTA DE FIGURAS

2.1.	Variacion en la infiltracion según la textura del suelo [14]	11
2.2.	Triángulo textural [13]	14
3.1.	Permeámetro de carga constante	16
6.1.	Archivo de entrada de la malla	92
6.2.	Archivo de nodos	93
6.3.	Explicación archivo de elementos	93
6.4.	Archivo de elementos	94
6.5.	Gráfico de la malla	94
6.6.	Clase elemento finito	95
6.7.	Ejecucion del programa computacional	97
6.8.	Visualización de resultados t=0	98
6.9.	Visualización de resultados t=19	99
6.10.	Visuslisación de resultados t=46	99
6.11.	Visualización de resultados t=57	100

6.12.	Visualización de resultados t=104 . . . . .	100
6.13.	Visualización de resultados 2D t=5 . . . . .	101
6.14.	Visualización de resultados 2D t=40 . . . . .	101
6.15.	Visualización de resultados 2D t=60 . . . . .	102
7.1.	Número de elementos versus error en norma 1 . . . . .	105
7.2.	Número de elementos versus tiempo en seg . . . . .	105
7.3.	Número de iteración versus error (método de Newton) . . . . .	106

## LISTA DE TABLAS

2.1.	Clasificación del suelo "United States Departament of Agriculture."	11
7.1.	Resultados numéricos . . . . .	104
7.2.	Convergencia del método de Newton . . . . .	106

## RESUMEN

### ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL. MODELACIÓN Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

El presente proyecto de tesis contiene el desarrollo de un modelo matemático para infiltración bidimensional en la zona saturada, el estudio de existencia y unicidad de dicho modelo así como también la elaboración, modelos numéricos con sus correspondientes algoritmos y programas computacionales.

El producto final de este proyecto de tesis es un programa computacional que modele la infiltración bidimensional de una sustancia en el suelo a una profundidad dada en un instante de tiempo determinado. Se espera que este simulador sea el inicio para la construcción posterior de un simulador comercial que tenga aplicaciones prácticas en la resolución de problemas como la evaluación de acuíferos, evaluación de la calidad del suelo para el cultivo de determinado producto, así como la evaluación de desastres ambientales (por ejemplo rotura de oleoductos ) en el oriente ecuatoriano entre otras .

## DESCRIPTORES

ECUACIÓN DE RICHARDS/ INFILTRACIÓN EN EL SUELO/ LEY DE DARCY/ MODELO MATEMÁTICO/ FLUJO EN ZONA NO SATURADA/ ELEMENTOS FINITOS/ MALLA TIPO ELEMENTOS FINITOS/ DELPHI XE2/ MÉTODO DE NEWTON

# ABSTRACT

## BIDIMENSIONAL RICHARDS EQUATION. NUMERICAL MODELING AND SIMULATION

This thesis project contain a mathematical model development for two dimensional infiltration in the saturated zone, the study of existence and uniqueness of the same model also its elaboration, numeric models with their algorithms and computer programs.

The final product of this thesis project is a computer program for modeling the two dimensional infiltration of a substance on the floor in a given depth and an instant of determinate time. It is hoped this simulator will be the beginning for the next construction of a commercial simulator that it will have practical applications about related problem as aquifer evaluations, ground quantity evaluation to cultivate a given product also environment disasters (For example, fractures of pipelines) in Ecuadorian orient and others.


## DESCRIPTORS

RICHARDS' EQUATION / INFILTRATION IN TO THE FLOOR / DARCY'S  
LAW / MATHEMATICAL MODEL / UNSATURATED ZONE FLOW / FINE  
ELEMENTS/ FINITE ELEMENT MESH TYPE / DELPHI XE2 / NEWTON'S  
METHOD

## CERTIFICACIÓN

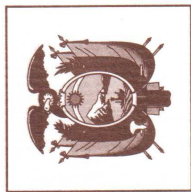
Certifico que la traducción del resumen de la tesis de grado titulada ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL MODELACIÓN Y SIMULACIÓN NUMÉRICA, cuyo autor es el Sr. GUILLERMO ALEXIS ALBUJA PROAÑO, fue realizada en su totalidad por mi persona, además debo indicar que estoy autorizada para hacerlo ya que poseo la suficiencia en el idioma inglés.

Quito a 14 de octubre de 2013



Carla Paulina Pinto Auz

C.C.: 1714411988



# CENDIA

EDUCATIONAL CENTER OF LANGUAGES AND ADMINISTRATIVE SPECIALIZATIONS

THE BOARD OF DIRECTORS CONFERS THIS

## Diploma

TO Ms. CARLA PAULINA PINTO AUZ

for having attended and completed our regular

### ENGLISH COURSE

with the final average of EIGHT (8)

Quito, OCTOBER 6<sup>th</sup>, 2001



*Angel G. G.*

GENERAL DIRECTOR

*Carla V. Ballalga*

DIRECTOR OF COURSES

*Yolanda Cuadros*

SECRETARY



# CAPÍTULO 1

## ASPECTOS GENERALES

### 1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La infiltración se produce en el terreno por la acción conjunta de dos fuerzas, la de gravedad y la de atracción molecular, las que pueden actuar en un mismo sentido o bien en forma opuesta, según las circunstancias. En la segunda mitad del siglo IXX, el ingeniero francés Henry Darcy, desarrolló el primer estudio sistemático del movimiento del agua a través de un medio poroso, estableciendo la ley conocida como Ley de Darcy, posteriormente se establecieron los modelos matemáticos para este fenómeno, es así que para flujo saturado el modelo es la ecuación de difusión y para flujo no saturado conocida como ecuación de Richards (1931).

Con la finalidad de explicar de mejor manera el problema, supóngase que se tiene una región de terreno  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  bañada, con alguna sustancia líquida (por ejemplo agua o petróleo). Esta sustancia se infiltra en el suelo en diferentes grados ya que este tiene diferentes características geológicas (como permeabilidad del suelo), se desea conocer la cantidad de líquido en  $\Omega$  a diferentes profundidades luego de transcurrido un tiempo determinado.

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES*

La correcta cuantificación de los procesos hidrológicos requiere una descripción precisa de la infiltración del suelo a través de la zona no saturada y saturada, el flujo no saturado de una sustancia en el suelo puede describirse físicamente mediante la ecuación en derivadas parciales menciona anteriormente "ecuación de Richards", que es una combinación de la ecuación de flujo no saturado de Darcy-Buckinham y la ecuación de conservación de masa, aunque la ecuación de Richards puede producir resultados precisos, carece de soluciones analíticas explícitas, por lo que normalmente se requiere de métodos numéricos para su resolución.

Por tratarse de una ecuación no lineal tridimensional lo más frecuente es el uso de un esquema numérico que combina el método de elementos finitos con el método de Newton, pero a pesar del desarrollo tecnológico, con computadores más rápidos y con mayor capacidad de almacenamiento, la resolución de este problema tiene un coste computacional muy alto y es de difícil implementación, es decir, su aplicación a suelos naturales en condiciones dinámicas resulta a menudo costosa y problemática, razón por la cual se han propuesto muchos métodos simplificados de cálculo de la infiltración, pero cuya aplicación es muy limitada.

Dado que el problema tiene numerosas y cada vez más importantes aplicaciones, en los últimos años se ha desarrollado numerosos estudios tratando de generar nuevos modelos, nuevos y más eficientes métodos numéricos que modelen el proceso de infiltración en el suelo así por ejemplo "Caracterización de procesos de infiltración en estado no saturado sobre suelos limosos compactados" Gonzalo M. Aiassa Universidad Nacional de Córdoba octubre 2008, "Potencial de infiltración de agua de lluvia a partir de la retención de una plantación forestal" Zavaleta Huerta Elizabeth, Cruz Jiménez Héctor, Márquez Ramírez Juan Foresta Veracruzana, vol. 14, núm. 1, marzo-agosto , 2012, pp. 23-28 recursos genéticos forestales Xalapa, México, "Estudio experimental del potencial de infiltración de relaves espesados TTD depositados directamente sobre suelos naturales" Rivera Gallardo Daniela Andrea Universidad de

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES*

Chile Chile 2012, "Diseño de una barrera de infiltración para el control y protección de las zonas vulnerables de la subcuenca El Abra en la isla de la Juventud" Estrella Santa Cruz Pérez ISPJAE 2002

### **1.2. METODOLOGÍA PROPUESTA**

La elaboración de un modelo matemático contempla generalmente cuatro etapas principales, todas ligadas entre sí, estas son:

#### **1.2.1. Estructuración del problema**

En esta etapa se precisa y plantea el problema a estudiar, y se definen los fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos si es el caso, que son dominantes en el estudio propuesto y luego se deducen las variables características del modelo: variables dependientes, variables independientes y parámetros. Por otro lado, se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- Elaboración de los objetivos del estudio.
- Elaboración de alternativas a seguir para lograr los objetivos de quien toma las decisiones.
- Importancia del problema y posibles beneficiarios.

#### **1.2.2. Desarrollo del modelo matemático**

Un modelo matemático se construye, generalmente, mediante el uso de las leyes de conservación, las leyes de comportamiento, las ecuaciones de estado y de la cinética química, la información experimental.

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES*

Las ecuaciones que se obtienen pueden ser: ecuaciones de tipo algebraico, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales. La información experimental conduce a la determinación de parámetros desconocidos en el modelo a partir de datos experimentales. Con frecuencia, se deben calcular coeficientes mediante el método de mínimos cuadrados.

Debemos observar que mientras más perfecto es el modelo matemático, más complejo es su análisis y en la misma medida su resolución. Puede resultar que las ecuaciones obtenidas en el modelo matemático son tan complejas que resulta prácticamente imposible de resolverlas.

En esta etapa debe considerarse también la simplificación del modelo matemático. Se debe cuidar en las simplificaciones excesivas que conducen a la pérdida de información o a pequeñas simplificaciones que producen problemas complejos que no aportan mayormente a la solución.

Con frecuencia se simplifica deliberadamente el modelo matemático con el propósito de obtener ecuaciones que se adapten a soluciones que pueden ser calculadas mediante el uso de programas computacionales existentes. "Este es un gravísimo error ya que puede perderse mucha información u obtener información distorsionada" según Benalcazar (2011).[4].

### **1.2.3. Resolución del conjunto de ecuaciones**

Una vez obtenido el conjunto de ecuaciones que gobiernan el fenómeno físico, químico, biológico o económico se debe proceder a la resolución de las mismas. La primera tarea para la resolución de las ecuaciones obtenidas es estudiar la existencia de soluciones del problema. Adicionalmente se indagará sobre la existencia de soluciones analíticas, esto es, se estudiará la existencia de soluciones exactas.

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES*

Si las soluciones analíticas son complejas se debe proceder a su aproximación. Si no es posible obtener soluciones analíticas, se deben obtener soluciones numéricas que se calculan mediante la utilización de métodos y técnicas de discretización adecuados que permiten obtener algoritmos de aproximación. Se deben identificar dos casos:

1. Existen programas elaborados que resuelven el problema propuesto.
2. De no ser así, deben elaborarse programas computacionales para la resolución del problema.

Para el segundo caso debe generarse un método numérico de aproximación de la solución del problema. Además, debe demostrarse matemáticamente que el método propuesto es convergente.

### **1.2.4. Análisis de los resultados**

Una vez obtenida la solución se analítica o numérica, se procede inmediatamente a interpretar los resultados y confrontarlos con el problema propuesto. Este análisis permite mejorar el modelo matemático y calibrarlo según las necesidades, esta etapa depende mucho de las herramientas informáticas a utilizarse, generalmente se obtienen: tablas de datos, gráficas de funciones y mapas. La solución numérica junto con la interpretación física de los resultados asistido por computadora es lo que se conoce como simulación numérica, una vez efectuada la simulación numérica corresponde a los especialistas en los fenómenos modelados delinear las estrategias a seguir.

### **1.3. JUSTIFICACIÓN**

La infiltración es un proceso que tiene gran importancia, particularmente la infiltración del agua en el suelo es un fenómeno muy importante en el ciclo hidrológico; su conocimiento cualitativo y cuantitativo es muy útil tanto para previsiones de la escorrentía superficial como para problemas relacionados a la hidráulica agraria.

Son muchos los sectores interesados en el estudio de la infiltración, uno de los más importantes es el sector agrícola, ya que la disponibilidad de agua en el suelo integra todo el sistema climático y determina la dinámica de producción de los cultivos ( Jaramillo y Chávez,1999). La infiltración se relaciona también con aspectos como la recuperación, conservación y manejo de suelos, planes de manejo y ordenamiento de cuencas, entre otros.

Este fenómeno también es estudiado por personas dedicadas a la investigación del control de riesgos y desastres naturales, un ejemplo son los derrames de petróleo, gasolinas o diésel en los suelos así como la evaluación de cierta infraestructura como represas y tanques que contienen algún tipo de sustancia nociva para el ambiente.

### **1.4. OBJETIVOS**

#### **1.4.1. Objetivos Generales**

Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Richards en casos concretos, aplicar el método de elementos finitos para aproximar la solución así como elaborar un programa computacional que permita simular el proceso de infiltración en el suelo en dos dimensiones y en el tiempo.

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES*

### **1.4.2. Objetivos Específicos**

1. Estudiar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial de Richards.
2. Discretizar la ecuación de Richards bidimensional con el método de elementos finitos para aproximar su solución mediante sistemas de ecuaciones no lineales.
3. Contrastar la solución numérica y la solución exacta usando un problema específico.

# CAPÍTULO 2

## ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS

### 2.1. RESEÑA HISTÓRICA

El ingeniero francés Henry Darcy al ser encargado del estudio de la red de abastecimiento de la ciudad Dijon, Francia y del diseño de filtros de arena para purificar el agua, se interesó por los factores que influían en el flujo del agua a través de los materiales arenosos, y presentó el resultado de su trabajo como un apéndice a su informe de la red de distribución. Este fue el primer trabajo publicado sobre el flujo de fluidos en medios porosos y consta de una ley que lleva su nombre.

Posteriormente Richards (1931) combina la ley de Darcy con la ecuación de continuidad dando como resultado la ecuación que lleva su nombre y que es motivo de nuestro estudio, lo que sigue fue obtenido de [14], [15], [16] y [17].



## 2.2. FORMACIONES GEOLÓGICAS Y SU COMPORTAMIENTO FRENTE AL AGUA

El suelo es un medio constituido por partículas, tanto minerales como orgánicas, de muy diversos tamaños, desde las piedras fácilmente apreciables a simple vista hasta las partículas de arcilla menores de 0,002 mm. Algunas de estas partículas pueden encontrarse separadas, mientras que otras están unidas entre sí formando agrupaciones mayores, más o menos duraderas, denominadas agregados. Estos pueden tener distintas formas y tamaños (microagregados, grumos, terrones) y están formados por la agregación de partículas relativamente gruesas (arenas y limos) unidas por materiales cementantes más finos (arcillas, carbonatos, humus). Entre estas partículas y agregados se encuentra un sistema de poros formado por huecos, también de muy diversas formas y tamaños, interconectados en todas las direcciones. Normalmente los poros más pequeños se encuentran ocupados por agua y los mayores por aire. Esta distribución en el espacio de la materia sólida y de los espacios vacíos es lo que se conoce como estructura del suelo, y es la que permite que el suelo funcione como un soporte poroso que proporciona agua, aire y nutrientes a las raíces de las plantas.

El agua procedente de las precipitaciones que comienza a ser absorbida y a moverse hacia el interior del suelo se conoce como agua de infiltración. Conforme sigue lloviendo (o continuamos regando) el agua va ocupando todos los poros y se va moviendo hacia abajo por el perfil del suelo. La que se mueve por los poros de mayor tamaño (macroporos de más de 10 micras de diámetro) es arrastrada por la fuerza de la gravedad y es conocida como agua de gravitación. Esta agua, si llueve mucho o los riegos son excesivos, atraviesa el perfil del suelo hasta llegar a las capas freáticas profundas. En el caso de que se encuentre con obstáculos, como una capa impermeable en los horizontes inferiores del suelo (generalmente una capa rica en arcillas u horizontes endurecidos: “cretas”) y si la pendiente es débil o nula, se forma una

## *CAPÍTULO 2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS*

capa de agua suspendida temporal. Esta capa saturada de agua se mantiene sólo durante los períodos húmedos, agotándose en los secos. Se trata de las conocidas charcas.

La mayor parte del agua de gravitación, la denominada de flujo rápido, drena durante las primeras horas a través de las grietas y poros más grandes (mayores de 50 micras de diámetro). Otra parte, la de flujo lento, puede tardar varios días en descender a través de los macroporos de menor tamaño (entre 50 y 10 micras).

Al cabo de unos días, cuando ya ha drenado el agua de gravitación, el suelo presenta una determinada humedad o capacidad de retención de agua. Esta agua es la que se queda en los poros más pequeños (microporos menores de 10 micras de diámetro). Se queda retenida por las fuerzas de absorción que aparecen entre las partículas y las delgadas capas de agua que se encuentran en estos microporos ( es la misma fuerza que hace que las gotas de agua que se queden pegadas a los cristales y la que permite que el agua suba por los tubos de pequeño diámetro o capilares). Esta agua retenida, después de que ha drenado el agua gravitacional, la podemos dividir en: agua capilar y agua ligada.

El agua capilar es la fracción del agua retenida por el suelo que puede ser absorbida por las raíces de las plantas, mientras que el agua ligada forma una capa tan fina alrededor de las partículas del suelo y está tan fuertemente unida a ellas que no puede ser aprovechada por las plantas.

### **2.3. TIPOS DE SUELO**

Existen una gran variedad de clasificaciones del suelo, pero la que es de nuestro interés es la que tiene que ver con su comportamiento frente al agua, así los principales tipos de suelo de acuerdo al tamaño de sus partículas son las siguientes:

## CAPÍTULO 2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS

TIPO SE SUELO	DIÁMETRO DE LA PARTÍCULA EN MILÍMETROS
Arena Muy gruesa	1.0 a 2.0
Arena Gruesa	0.5 a 1.0
Arena Mediana	0.25 a 0.5
Arena Fina	0.10 a 0.25
Arena Muy fina	0.05 a 0.10
Limo	0.002 a 0.05
Arcilla	menor de 0.002

Cuadro 2.1: Clasificación del suelo "United States Departament of Agriculture."

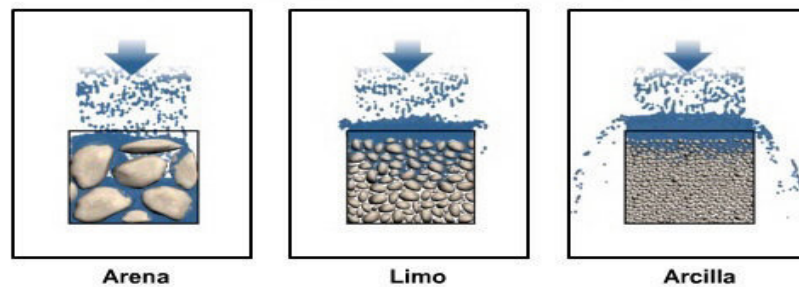


Figura 2.1: Variacion en la infiltracion según la textura del suelo [14]

Esta es una clasificación de acuerdo con el "United States Departament of Agriculture". Es de interés en nuestro estudio el tamaño de las partículas pues esto es lo que permitirá en mayor o menor medida el paso del agua a través del suelo. Las partículas que componen el limo son de un tamaño intermedio, entre la arena y la arcilla, los suelos que contienen un alto porcentaje de limo tienen tasas de infiltración y drenaje más altas que la arcilla, pero no tan altas como la arena, esto se muestra en la gráfica 2.1

## *CAPÍTULO 2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS*

### **2.3.1. Suelos arcillosos**

Están formados fundamentalmente por arcilla, la arcilla está constituida principalmente por silicato de aluminio hidratado, es un tipo de suelo que, cuando está húmedo o mojado, resulta pegajoso pero cuando está seco es muy fino y suave dado que la arcilla está formada por partículas diminutas de menos de 0,005 milímetros de diámetro, desde un punto de vista de la textura, tiene consistencia plástica y puede ser modelado, son suelos que para la agricultura, se conocen como suelos húmedos y pesados. Son muy impermeables dado que no dejan pasar el agua o el aire, todo ello propicia que sean suelos donde el agua se estanque con facilidad por lo que en este tipo de suelo se necesita realizar un sistema de drenaje adecuado porque, después de las lluvias el agua queda retenida en la superficie, presentan un color marrón oscuro.

Los suelos arcillosos, al secarse, quedan muy compactos y duros y se caracterizan por la aparición de grietas. La ventaja principal es que son suelos que conservan fácilmente la forma que les damos al trabajarlos. Sabemos que se trata de un suelo arcilloso porque cuando tomamos un pedazo del mismo en las manos, podemos hacer fácilmente una bola. Igualmente, si colocamos un trozo de esta materia entre los dedos pulgar e índice y la trabajamos con ambos dedos, podemos realizar cintas de hasta 5 cm con este tipo de tierra. Podemos decir que nos recuerda a la textura del chicle.

### **2.3.2. Suelos arenosos**

El suelo arenoso es el que está formado principalmente por arena, la arena son partículas pequeñas de piedra de silicio con un diámetro entre 0,02 y 2 mm . A diferencia de la arcilla cuando está húmeda o mojada no se engancha. Los suelos arenosos no retienen el agua que rápidamente se hunde a capas más profundas. Son suelos considerados secos en donde hay muy poca humedad. A diferencia del anterior estos requieren un riego continuado y un trabajo constante si queremos darle una

## *CAPÍTULO 2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS*

forma determinada porque la pierden con facilidad. Presentan colores claros.

Sabemos que se trata de este tipo de suelo porque al coger un poco de él entre los dedos, somos incapaces de formar una bola. Este tipo de tierra, por mucho que lo manipulemos, seguirá estando suelto.

### **2.3.3. Suelos limosos**

Son los suelos que contienen una proporción muy elevada de limo. Es un tipo de suelo muy compacto, sin llegar a serlo tanto como los arcillosos. Estos suelos son producidos por la sedimentación de materiales muy finos arrastrados por las aguas o depositados por el viento. Suelen presentarse junto a los lechos de los ríos y son muy fértiles. Sabemos que se trata de suelos limosos porque, al igual que los arcillosos, permiten formar bolas aunque estas se rompen con facilidad. A diferencia de los arcillosos no nos permiten formar cintas entre los dedos. De manera más general y tomando en cuenta los tipos básicos de suelos anteriores, el suelo se puede clasificar mediante el triángulo textural según la figura 2.2, el cual toma en cuenta el porcentaje de arcilla, limo y arena.

## **2.4. APLICACIONES**

La infiltración del agua en el suelo es un fenómeno que tiene gran importancia en el ciclo hidrológico, su conocimiento cualitativo y cuantitativo es muy útil tanto para previsiones de la escorrentía superficial como para problemas relacionados a la hidráulica agraria. ya que la disponibilidad de agua en el suelo integra todo el sistema climático y determina la dinámica de producción de los cultivos ( Jaramillo y Chávez,1999). Este fenómeno también es estudiado por personas dedicadas

## CAPÍTULO 2. ELEMENTOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS

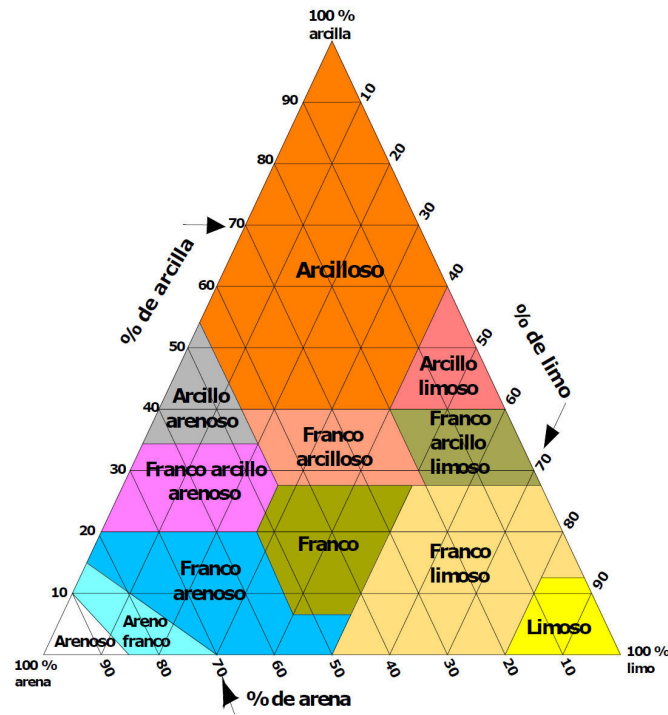


Figura 2.2: Triángulo textural [13]

a la investigación del control de riesgos y desastres naturales como inundaciones y deslaves, así como también el estudio de filtraciones en presas que en tiempos pasados se llevaba a cabo utilizando soluciones analíticas que consideran la geometría y propiedades hidrogeológicas simples, pero en la actualidad se pueden realizar modelaciones numéricas computacionales que permiten simular tanto la zona saturada como no saturada del flujo, lo que hace más completo, y por ende más confiable el resultado. Otra aplicación que tiene mucha importancia es la evaluación de acuíferos, ya que en la actualidad las fuentes de abastecimiento de agua subterránea padecen deterioro en calidad y cantidad. Cada vez es más indispensable realizar modelaciones matemáticas que permitan tomar decisiones óptimas para el manejo del agua o rehabilitación de mantos acuíferos contaminados.

# CAPÍTULO 3

## MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

### 3.1. LEY DE DARCY

#### 3.1.1. El experimento de Darcy

En los laboratorios actuales se dispone de aparatos muy parecidos a los que usó Darcy y se llaman permeámetros de carga constante (figura 3.1), este consiste en un recipiente vertical de sección constante  $A$ , el cual se rellena de un medio poroso por ejemplo arena, se hace circular agua conectando uno de sus extremos a un depósito elevado cuyo nivel se mantiene constante de manera que la presión del fluido a la entrada es constante. Se mide el volumen de agua que atraviesa el recipiente por unidad de tiempo es decir el caudal  $Q$  y las alturas piezométricas  $h_1$  y  $h_2$  medidas en dos puntos entre los cuales existe una longitud  $\Delta l$ .

Darcy encontró que el caudal  $Q$  que atravesaba el permeámetro era linealmente proporcional a la sección y a  $\Delta h = h_1 - h_2$  dividido por  $\Delta l$  es decir :

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

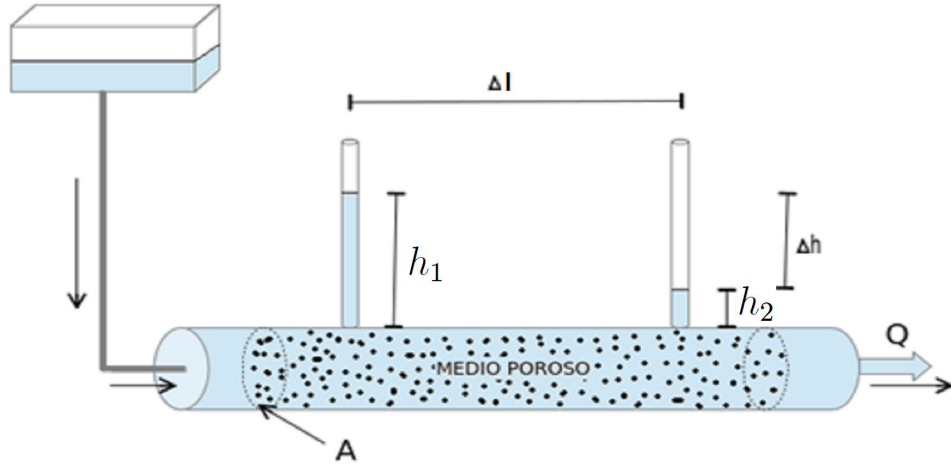


Figura 3.1: Permeámetro de carga constante

$$Q = KA \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

donde  $K$  es la constante de proporcionalidad. Además encontró que utilizando otra arena (más gruesa o fina, o mezcla de gruesa y fina, etc.) y jugando de nuevo con todas las variables, se volvía a cumplir la ecuación anterior, pero que la constante de proporcionalidad lineal era otra distinta. Concluyó, por tanto, que esa constante era propia y característica de cada arena y la llamó permeabilidad. Como el caudal  $Q$  está en  $[L^3/T]$ , la sección en  $[L^2]$ , y  $\Delta h$ ,  $\Delta l$  son longitudes, se comprueba que las unidades de la permeabilidad ( $K$ ) son las de una velocidad  $[L/T]$ . Tomando incrementos infinitesimales se tiene que, la Ley de Darcy se expresa de esta forma:

$$q = -K \frac{dh}{dl}$$

donde:



### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

- $h$  es el cambio de altura respecto a la horizontal
- $q = \frac{Q}{A}$  es decir: caudal que circula por  $m^2$  de sección
- $K$  conductividad hidráulica
- $\frac{dh}{dl}$  gradiente hidráulico expresado en incrementos infinitesimales

el signo menos se debe a que el caudal es una magnitud vectorial, cuya dirección es hacia los  $\Delta h$  decrecientes; es decir, que  $\Delta h$  o  $dh$  es negativo y, por tanto, el caudal será positivo.

#### 3.1.2. Ley de Darcy en tres dimensiones

Si usamos esta ley en las tres direcciones  $x, y, z$  considerando suelos anisótropos (es decir que tiene distintas características en cada una de sus direcciones), podemos representar esto usando tres planos ortogonales de simetría que se cortan según tres ejes principales  $x, y, z$ . Las ecuaciones en este caso serán:

$$\begin{aligned}q_x &= -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \\q_y &= -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \\q_z &= -K_z \frac{\partial h}{\partial z}\end{aligned}$$

Si se considera el suelo isotropo se tiene que  $K_x = K_y = K_z = K$ , la ley de Darcy se puede escribir como:

$$(q_x, q_y, q_z) = \vec{q} = K \nabla h$$

### 3.1.3. Ley de Darcy-Buckingham

En los suelos parcialmente saturados existen dos fluidos en los poros: agua y aire. La ley de Darcy ha sido obtenida para un solo fluido, por tanto, no es aplicable, en principio, en este tipo de suelos. Las burbujas de aire taponan parte de los poros en que se encuentran, y no permiten el paso del líquido cuando éste es el permeante. Por ello la permeabilidad al agua de un suelo parcialmente saturado suele ser menor que la del mismo suelo saturado. Por este motivo, la permeabilidad de un suelo parcialmente saturado aumenta con el paso del tiempo durante el que está expuesto al paso del agua, porque su grado de saturación va aumentando a medida que más y más burbujas van siendo arrastradas por el agua, y a medida que el aire va siendo disuelto en el agua. El coeficiente de permeabilidad de suelos parcialmente saturados aumenta al aumentar la presión del líquido, pues esto provoca un incremento en la cantidad de gas disuelta y, por tanto, una disminución en el espacio ocupado por burbujas gaseosas luego en este tipo de suelo  $K$  depende de  $h$  y la ley de Darcy toma la siguiente forma:

$$\vec{q} = K(h)\nabla h$$

## 3.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

**Teorema** (la divergencia de Gauss).- Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$  con  $\Gamma$  su frontera,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  y  $\vec{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\vec{F} = (f, g)$  un campo vectorial definido en  $\bar{\Omega}$ . Supongamos que  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$  son integrables en  $\bar{\Omega}$ , entonces se tiene:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dx = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds,$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal exterior a  $\Gamma$

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

Nótese que la integral del lado derecho es una integral de línea con respecto a la longitud de arco a lo largo de la curva  $\Gamma$ . La integral del lado izquierdo es una integral doble.

Sea  $x_0 \in \Gamma$  y  $\vec{n}(x_0)$  el vector normal exterior a  $\Gamma$  en  $x_0$ . Sea  $\theta \in [0, \pi]$  el ángulo que forman  $\vec{F}(x_0)$  y  $\vec{n}(x_0)$ , entonces  $\vec{F}(x_0) \cdot \vec{n}(x_0) \geq 0$  si  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , en cuyo caso  $\vec{F}(x_0)$  está dirigido hacia el exterior de  $\Omega$ ;

$\vec{F}(x_0) \cdot \vec{n}(x_0) < 0$  si  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  con lo que  $\vec{F}(x_0)$  está dirigido hacia el interior de  $\Omega$ .

La integral de línea  $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$  representa la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de  $\Gamma$ . consecuentemente  $\int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dx$  representa la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de  $\Gamma$ .

Si  $\vec{F} = \nabla g$ , entonces

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dx = \int_{\Omega} \text{div}(\nabla g) dx = \int_{\Omega} \Delta g dx,$$

luego,

$$\int_{\Omega} \Delta g dx = \int_{\Gamma} \nabla g \cdot \vec{n} ds.$$

El término  $\nabla g \cdot \vec{n}$  se llama derivada normal de  $g$  con respecto a la normal en  $\Gamma$  y se denota con  $\frac{\partial g}{\partial n}$ , esto es,

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \vec{n}.$$

**Teorema.-** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , abierto, acotado,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $\Omega$ . Si

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0,$$

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

para todo subconjunto medible  $V \subset \Omega$ , entonces

$$f = 0, \text{ ctp de } \Omega.$$

donde el término ctp de  $\Omega$  quiere decir en todo  $\Omega$ , excepto en un conjunto de medida de Lebesgue nula.

**Teorema** (Green - Gauss).- Sean  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$  con  $\Gamma$  su frontera,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  y  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar,  $\vec{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial con  $\vec{F} = (f, g)$ , supongamos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} f, \frac{\partial \varphi}{\partial y} g$  son integrables en  $\Omega$ . entonces

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(\vec{F}) dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \vec{F} dx = \int_{\Gamma} \varphi \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Si  $\vec{F} = \nabla u$ , por el teorema de Green - Gauss, se tiene

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u dx = \int_{\Gamma} \varphi \nabla u \cdot \vec{n} ds$$

o también

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u dx = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

#### Volumen de control

Un volumen de control es una región fija del plano o del espacio a través de la cual circula un fluido. Se considera como volumen de control a un conjunto no vacío de  $\mathbb{R}^3$  limitado por una superficie cerrada llamada superficie de control. Los volúmenes de control pueden ser fijos o móviles. El fluido puede entrar o salir del volumen de control. El volumen de control puede sufrir deformaciones con el tiempo.

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

Se supondrá que el volumen de control se desplaza con la misma velocidad del fluido y que la velocidad en todo punto de la superficie del volumen de control es igual a la velocidad del fluido. Posteriormente obtendremos las ecuaciones diferenciales de flujo de un fluido aplicando las leyes fundamentales utilizando volúmenes de control que asumiremos son conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue, nos limitaremos a conjuntos acotados y medibles en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema** (transporte de Reynolds).- Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$  con  $\Gamma$  su frontera de clase  $C^1$  a trozos. Sean  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $0 \leq T_1 < T_2$ , y

$$\begin{aligned} f : \Omega \times [T_1, T_2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\rightarrow f(x, t) \end{aligned}$$

una función tal que para todo punto  $t \in [T_1, T_2]$ ,  $f(\cdot, t)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$  son integrables en  $\Omega$ .

Para  $t \in [T_1, T_2]$ , sea  $\Omega(t) \subset \Omega$  un volumen de control y  $\Gamma(t)$  su frontera. Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)} f(x, t) \vec{v} \cdot \vec{n} ds,$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad local de  $\Omega(t)$  y  $\vec{n}$  es el vector normal exterior a  $\Gamma(t)$ . Se supone que la integral de línea existe

El teorema de transporte de Reynolds tiene la siguiente interpretación física : la rapidez de cambio de flujo en el volumen de control es igual a la rapidez de flujo que entra en el volumen de control más el flujo en la frontera. Si  $f(x, t) \vec{v} \cdot \vec{n} > 0$  entonces existe salida de flujo en la frontera; si  $f(x, t) \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  no existe entrada ni salida y si  $f(x, t) \vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  ingresa flujo a través de la frontera, es decir el balance

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

de  $f$  del sistema  $\Omega(t)$  es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de variación} \\ \text{de la integral de } f \\ \text{sobre el volumen} \\ \text{de control } \Omega(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral sobre } \Omega(t) \\ \text{de la variación de} \\ f \text{ con respecto al} \\ \text{tiempo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de } f \text{ a} \\ \text{través de la} \\ \text{frontera } \Gamma(t) \end{array} \right\}.$$

Por el teorema de divergencia de Gauss, tenemos

$$\int_{\Gamma(t)} f(x, t) \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega(t)} \text{div}(f \vec{v}) dx$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega(t)} \text{div}(f \vec{v}) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{v}) \right] dx \end{aligned}$$

#### Ecuación de la continuidad

La densidad de un fluido (líquido o gas) homogéneo puede depender de muchos factores tales como la temperatura y la presión a la que está sometido. Para los líquidos, la densidad varía muy poco dentro de amplios límites de presión y temperatura. Con fines prácticos en la contaminación ambiental, los líquidos que no están sujetos a una fuente contaminante serán considerados de densidad constante. Por el contrario, si el líquido está sujeto a una fuente contaminante cambiará de densidad. La densidad de los gases es muy sensible a los cambios de temperatura y presión, la densidad se define como:  $\rho = \frac{m}{V}$  o  $\rho = \frac{dm}{dx}$ . siendo sus unidades de denominación  $\frac{kg}{m^3}$  o  $\frac{g}{cm^3}$ .

Sea  $\Omega(t)$  un volumen de control que se mueve con una velocidad  $v$ ,  $t \in [T_1, T_2]$ . La densidad del fluido contenido en  $\Omega(t)$  es  $\varrho(x, t) = \frac{dm(t)}{dx}$ , de donde  $dm(t) = \varrho(x, t) dx$  e integrando sobre  $\Omega(t)$ , tenemos

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

$$m(t) = \int_{\Omega(t)} dm(t) = \int_{\Omega(t)} \varrho(x, t) dx.$$

Derivando con respecto al tiempo, nos da

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varrho(x, t) dx,$$

y por el teorema de transporte de Reynolds, obtenemos

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right] dx.$$

#### Sistema conservativo

Un sistema se dice conservativo si la masa del sistema no se crea, ni se destruye; es decir que la masa permanece constante durante todo el proceso, esto es  $\frac{dm(t)}{dt} = 0$  para todo  $t \geq 0$ . es decir,

$$\int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right] dx = 0.$$

Como la integral precedente es válida para cualquier volumen de control, se demuestra que

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \quad \text{ctp de } \Omega \times ]T_1, T_2[$$

La ecuación precedente se denomina “ecuación de continuidad” para sistemas conservativos.

En lo sucesivo escribiremos

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \quad \text{sobre } \Omega_T,$$

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

donde  $\Omega_T = \Omega \times ]T_1, T_2[$ .

#### Flujo

El flujo de un fluido se define como la cantidad de masa que atraviesa una superficie de área  $A$  en un tiempo  $t$ . Sea  $\Omega(t)$  un volumen de control por el que circula un fluido de abajo hacia arriba con una velocidad  $\vec{v}(t)$  y norma  $v(t)$ . El área de la superficie de la base es  $A$  y la altura del volumen de control es  $L$ , entonces, la magnitud de flujo se expresa como

$$q = \frac{m}{At} \quad \left( \text{en } \frac{Kg}{m^2seg} \text{ o } \frac{g}{cm^2seg} \right).$$

multiplicando por  $L$  numerador y denominador, obtenemos

$$q = \frac{m}{AL} \frac{L}{t},$$

y tomando en cuenta que el volumen de  $\Omega(t)$  es  $V = AL$ , la velocidad  $v(t) = \frac{L}{t}$  y la densidad  $\varrho = \frac{m}{V}$ , se tendrá que  $q = \frac{m}{V} \cdot v(t) = \varrho v(t)$ ,

El flujo se define como el campo vectorial

$$\vec{q}(x, t) = \varrho(x, t) \vec{v}(t)$$

cuya magnitud en el instante  $t$  es  $q = \varrho v(t)$ .

Notese que el flujo  $\vec{q}$  y su magnitud  $q$  son valores medios en el volumen de control  $\Omega(t)$ .

Ahora la ecuación de continuidad se expresa como

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = 0 \quad \text{sobre } \Omega \times ]T_1, T_2[.$$



### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

#### Flujo permanente o estacionario

El flujo se dice estacionario si  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ , entonces  $\operatorname{div}(\vec{q}) = 0$  sobre  $\Omega$ , o también  $\nabla \cdot \vec{q} = 0$  sobre  $\Omega$ .

#### Flujo incompresible

Un flujo se dice incompresible si su densidad permanece constante durante todo el proceso, como  $\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = \varrho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ , se sigue que

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \text{ sobre } \Omega,$$

o bien

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ sobre } \Omega.$$

por lo tanto un fluido es incompresible si

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

#### Sistema no conservativo

Un sistema es no conservativo si la masa no permanece constante durante el tiempo del proceso, es decir que al interior o en la frontera del sistema existe una fuente o un sumidero, lo cual significa que  $\frac{dm(t)}{dt} \neq 0$ .

Sea  $f$  una función definida en  $\Omega \times [T_1, T_2]$  integrable en  $\Omega(t)$  para todo  $t \in [T_1, T_2]$ , tal que

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx.$$

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

esta función  $f$  se denomina una fuente.

Por el teorema de transporte de Reynolds, se tiene

$$\int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\vec{q}(x, t)) \right] dx$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) - f \right] dx = 0.$$

de la arbitrariedad del volumen de control  $\Omega(t)$ , se prueba que

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) = f \text{ sobre } \Omega \times ]T_1, T_2[.$$

#### Flujo permanente o estacionario

Se tiene  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ , luego  $\operatorname{div}(\vec{q}) = f$  sobre  $\Omega$ , o también

$$\nabla \cdot \vec{q} = f \text{ sobre } \Omega.$$

#### Flujo incompresible

Si la densidad es constante, entonces  $\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = \varrho \operatorname{div}(\vec{v})$ , con lo que

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{f}{\varrho} \text{ sobre } \Omega$$

o bien

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{f}{\varrho} \text{ sobre } \Omega.$$

### 3.3. ECUACIÓN DE RICHARDS

La ecuación de Richards se obtiene de reemplazar la ley de Darcy-Buckingham  $\vec{q} = K(h)\nabla h$  en la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad para un sistema conservativo  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = 0$  sobre  $\Omega_T = \Omega \times ]T_1, T_2[$ . así la ecuación quedaría de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) = 0 \text{ sobre } \Omega_T, \\ + \text{Condiciones iniciales} \\ + \text{Condiciones de frontera} \end{array} \right.$$

En el presente trabajo, a fin de darle mayor generalidad a nuestro estudio se considerará la siguiente ecuación del tipo parabólico no lineal :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar una función } u : \overline{\Omega_T} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ solución de} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) + g(x, u) = f \text{ sobre } \Omega_T, \\ + \text{Condiciones iniciales} \\ + \text{Condiciones de frontera} \end{array} \right.$$

#### 3.3.1. Condiciones Iniciales y de Frontera

Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^2$  (acotado o no acotado en una dirección) con  $\Gamma$ . su frontera, las condiciones iniciales reflejan el estado de  $u$  en el instante inicial, es decir, si se conoce la función  $u$  al instante  $t = 0$ , la función densidad  $u(x, 0)$ ,  $\forall x \in \Omega$  se llama condición inicial. Esta función lo denotaremos con  $u_0(x)$ ; esto es,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

### CAPÍTULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS DE INFILTRACIÓN

Las condiciones de frontera o también llamadas condiciones de contorno, determinan la interacción del fenómeno con el medio que lo rodea y esto solo puede darse a través de su frontera, luego solo tienen sentido cuando el fenómeno estudiado tiene frontera. Si consideramos que la función  $u$  en la frontera de  $\Omega$  es una función  $f_1(x, t)$ , con  $x \in \Gamma$  y  $t \geq 0$ , entonces la relación

$$u(x, t) = f_1(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [T_1, T_2]$$

se llama condición de frontera de Dirichlet no homogénea si  $f_1(x, t) \neq 0$ , y de Dirichlet homogénea, si  $f_1(x, t) = 0$  sobre  $\Gamma \times [T_1, T_2]$ .

Si el flujo en la frontera de  $\Gamma$  es una función conocida  $h(x, t)$ ,  $x \in \Gamma$ , es decir que:

$$\vec{q}(x, t) \cdot \vec{n} = h(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [T_1, T_2],$$

donde  $\vec{q}(x, t)$  es el flujo y  $\vec{n}$  es el vector normal exterior a  $\Gamma$ , se llama condición de Neumann. Si  $h = 0$  sobre  $\Gamma$ , se dice condición de Neumann homogénea; en el caso contrario, se dice condición de Neumann no homogénea.

La combinación de las condiciones de frontera (CF) de Dirichlet y de Neumann se llaman condiciones de frontera mixtas o de Robin.

# CAPÍTULO 4

## ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

### 4.1. MARCO TEÓRICO

#### 4.1.1. Espacios Funcionales

##### Espacios de Banach y de Hilbert

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Una norma en  $V$ , que se nota  $\|\cdot\|_V$  es una función de  $V$  en  $\mathbb{R}$  que satisface las propiedades siguientes:

1.  $\|x\|_V \geq 0$ ;  $\forall x \in V$ .
2.  $\|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
3.  $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in V$ .
4.  $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$ ,  $\forall x, y \in V$  (desigualdad triangular).

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

El par  $(V, \|\cdot\|_V)$  se llama *espacio normado*, en lo sucesivo diremos simplemente  $V$  es un espacio normado, entendiéndose naturalmente que  $\|\cdot\|_V$  es la norma definida en  $V$ .

**Definición.-** Sea  $(x_n)$  una sucesión en un espacio normado  $V$ .

Se dice que un elemento  $x \in V$  es el *límite* de  $(x_n)$  si

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Definición.-** Se dice que  $(x_n)$  es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m, n \geq \eta_0(\varepsilon) \Rightarrow \|x_m - x_n\|_V < \varepsilon$$

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, el recíproco, en general, no es cierto.

**Definición.-** Un espacio normado  $V$  se dice completo si toda sucesión de Cauchy en  $V$  es convergente. Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Un *producto escalar* en  $V$ , que se denota con  $(\cdot, \cdot)_V$ , es una función de  $V \times V$  en  $\mathbb{R}$  que verifica las propiedades siguientes:

1.  $(x, y)_V = (y, x)_V \quad \forall x, y \in V.$
2.  $(x + y, z)_V = (x, z)_V + (y, z)_V \quad \forall x, y, z \in V.$
3.  $(\lambda x, y)_V = \lambda(x, y)_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in V.$
4.  $(x, x)_V \geq 0 \quad \text{y} \quad (x, x)_V = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x, y \in V.$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

Un espacio vectorial  $V$  provisto de un producto escalar  $(\cdot, \cdot)_V$  se llama *espacio euclídeo*.

Todo espacio euclídeo  $V$  puede ser normado si se le provee de la norma siguiente:

$$\|x\|_V = \sqrt{(x, x)_V} \quad \forall x \in V.$$

Esta norma  $\|\cdot\|_V$  se dice inducida por el producto escalar  $(\cdot, \cdot)_V$ . Resulta así que  $V$  es un espacio normado.

En un espacio euclídeo  $V$  se verifica la siguiente desigualdad

$$|(x, y)_V| \leq \|x\|_V \|y\|_V, \quad \forall x, y \in V,$$

llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

**Definición.-** Un *espacio de Hilbert*  $V$  es un espacio euclídeo que como espacio normado es completo.

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio euclídeo. Decimos que  $x$  es *ortogonal* a  $y$ , que se escribe  $x \perp y$  si  $(x, y)_V = 0$ .

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio normado,  $x \in V$  y  $K \subset V$ . La *distancia* de  $x$  a  $K$  se define como

$$d(x, K) = \inf_{v \in K} \|x - v\|_V.$$

Proyección sobre un convexo cerrado.

**Teorema.-** Sea  $V$  un espacio de Hilbert real,  $K \subset V$  un convexo cerrado y  $x \in V$ .

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

1. Existe un único  $y \in K$  tal que

$$\|x - y\|_V = \min_{v \in K} \|x - v\|_V .,$$

además, este elemento  $y$  puede caracterizarse por

$$(x - y, v - y)_V \leq 0, \forall v \in K.$$

2. Sea  $P_K : V \rightarrow K$  la aplicación definida por  $P_K(x) = y$ , donde  $x$  e  $y$  están ligadas por segun el punto anterior, entonces

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\|_V \leq \|x_1 - x_2\|_V, \quad \forall x_1, x_2 \in V.$$

3. Si  $K \subset V$  es un subespacio cerrado y  $x \in V$ . Entonces  $y = P_K(x)$  es tal que

$$(x - y) \perp v, \forall v \in K$$

Principio de la aplicación contractiva.

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio de Banach,  $M \subset V$ ,  $M \neq \emptyset$  y  $\Phi : M \rightarrow M$  una aplicación.

1. Se dice que  $\Phi$  es una aplicación contractiva si existe  $k$ ,  $0 < k < 1$ , tal que

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_V \leq k \|x - y\|_V \quad \forall x, y \in M.$$

2. Un elemento  $x \in M$  se llama punto fijo de  $\Phi$  si

$$\Phi(x) = x.$$

**Teorema** (Banach del punto fijo).- Sea  $V$  un espacio de Banach,  $M \subset V$  con  $M \neq \emptyset$  y  $M$  cerrado. Sea  $\Phi : M \rightarrow M$  una aplicación contractiva. Entonces, existe un único  $x \in M$  tal que  $\Phi(x) = x$ .



## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

### Aplicaciones lineales continuas.

**Definición.-** Sean  $V, W$  dos espacios reales normados con  $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$  respectivamente.

1. Una aplicación  $T$  de  $V$  en  $W$  se dice *lineal* si verifica la condición:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in V.$$

2. Sea  $T : V \rightarrow W$  una aplicación lineal. El conjunto  $\ker(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$  se llama *núcleo* de  $T$ , el conjunto  $R(T) = \{T(x) : x \in V\}$  se llama recorrido de  $T$ .

3. Una aplicación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$  se dice continua si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x - y\|_V < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_W < \varepsilon.$$

El conjunto  $\ker(T)$  es un subespacio de  $V$ ,  $R(T)$  es un subespacio de  $W$ . Además, si  $V$  y  $W$  son de dimensión finita, las dimensiones de  $\ker(T)$  y de  $R(T)$  están relacionadas del modo siguiente:

$$\dim \ker(T) + \dim R(T) = \dim V.$$

Una aplicación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$  es *inyectiva* si  $\ker(T) = \{0\}$  y es *sobreyectiva* si  $R(T) = W$ . La aplicación lineal  $T$  se dice *invertible* si  $T$  es *biyectiva*, esto es,  $T$  es inyectiva y sobreyectiva.

Se demuestra que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $T$  es continua.
2.  $T$  es continua en el origen.

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

3.  $T$  es acotada en la bola unitaria cerrada  $\overline{B(0, 1)}$ .
4. Existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|T(x)\|_W \leq C \|x\|_V \quad \forall x \in V$ .

Por otra parte, se prueba que una aplicación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$  es continua, si y solo si, para toda sucesión  $(x_n) \subset V$  convergente a  $x \in V$ , la sucesión  $(T(x_n))$  es convergente a  $T(x)$ .

Se designa con  $\mathcal{L}(V, W)$  al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales continuas de  $V$  en  $W$ . En tal espacio introducimos la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V, W)} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T(x)\|_W, \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W),$$

con lo cual  $\mathcal{L}(V, W)$  es un espacio normado. Si  $V = W$ , notamos  $\mathcal{L}(V)$  en vez de  $\mathcal{L}(V, W)$ . Por otro lado, si  $W$  es un espacio de Banach, se prueba que  $\mathcal{L}(V, W)$  es también un espacio de Banach.

Particularmente, si  $W = \mathbb{R}$ , el espacio  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  se nota con  $V^*$  y se denomina espacio dual de  $V$ . Los elementos de  $V^*$  se denominan formas lineales continuas o funcionales lineales continuos. La norma de  $V^*$  está definida por

$$\|T\|_{V^*} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} |T(x)|, \quad \forall T \in V^*.$$

**Teorema** (representación de Riesz).-Sea  $V$  un espacio real de Hilbert y  $V^*$  su dual. Para cada  $L \in V^*$  existe un único  $\xi \in V$  tal que

$$L(v) = (\xi, v) \quad \forall v \in V,$$

y

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\|L\|_{V^*} = \|\xi\|_V.$$

Además, existe  $\Phi \in \mathcal{L}(V^*, V)$  tal que

$$\Phi(L) = \xi$$

y

$$\|\Phi(L)\|_V = \|L\|_{V^*}.$$

**Definición.-** Sean  $V, W$  dos espacios reales de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Denotamos con  $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$  el *operador adjunto* de  $T$  definido por

$$(T(u), v)_W = (u, T^*(v))_V \quad \forall u \in V, \quad v \in W.$$

#### Formas bilineales continuas

**Definición.-** Sea  $V, W$  espacios vectoriales reales. Una aplicación  $a(\cdot, \cdot)$  de  $V \times W$  en  $\mathbb{R}$  se dice *forma bilineal* en  $V \times W$  si

1.  $a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y \in V, \quad z \in W,$
2.  $a(x, \alpha y + \beta z) = \alpha a(x, y) + \beta a(x, z), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in V, \quad y, z \in W.$

Si  $V = W$ , una forma bilineal en  $V \times V$  se dice simplemente forma bilineal en  $V$ .

Se dice que una forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es *simétrica* si  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal en  $V$  y se verifica que

$$a(x, y) = a(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

**Definición.-** Sean  $V, W$  espacios normados y  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal en  $V \times W$ . Se dice que  $a(\cdot, \cdot)$  es *continua* si existe una constante  $M > 0$  tal que

$$a(x, y) \leq M \|x\|_V \|y\|_W, \quad \forall x \in V, y \in W.$$

**Definición.-** Sea  $V$  un espacio de Hilbert real y  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal en  $V$ . Se dice que  $a(\cdot, \cdot)$  es *coerciva* si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|_V^2, \quad \forall x \in V.$$

Sea  $V$  un espacio de Hilbert real y  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal en  $V$ , utilizando el teorema de representación de Riesz, se prueba que existe  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que

$$a(x, y) = (x, T(y))_V, \quad \forall x, y \in V.$$

**Teorema** (Stampacchia).-Sea  $V$  un espacio real de Hilbert y  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal, continua y coerciva en  $V$ ,  $K \subset V$ ,  $K \neq \emptyset$  un convexo cerrado y  $f \in V$ . Entonces existe un único  $\hat{u} \in K$  tal que

$$a(\hat{u}, v - \hat{u}) \geq (f, v - \hat{u})_V, \quad \forall v \in K.$$

**Teorema** (Lax-Milgram).-Sea  $V$  un espacio real de Hilbert y  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal, continua y coerciva en  $V$ . Si  $L \in V^*$ , entonces existe un único  $\hat{u} \in V$  tal que

$$a(\hat{u}, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

y

$$\|\hat{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V^*}.$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

### **Espacio** $L^p(\Omega)$

En lo sucesivo supondremos que el lector esta familiarizado con la integral de Lebesgue.

**Definición.-**Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $1 \leq p < \infty$ . El espacio  $L^p(\Omega)$  se define como el conjunto de clases de funciones cuyo valor absoluto es  $p$  integrable sobre  $\Omega$ , es decir:

$$f \in L^p(\Omega) \iff \begin{cases} f \text{ medible y} \\ \int_{\Omega} |f|^p < \infty. \end{cases}$$

La norma definida en este espacio es:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Cuando  $p = \infty$  se define como:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ medible y } \sup_{x \in \Omega} \text{Ess} |f(x)| < \infty\}$$

con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{Ess} |f(x)|$$

**Teorema.-**Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $p, q \in [0, \infty]$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

#### 1. Desigualdad de Hölder

Sea  $f \in L^p(\Omega)$  ;  $g \in L^q(\Omega)$  entonces  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$  y

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

Particularmente, si  $p = 2$ ,  $q = 2$ . La desigualdad de Hölder no es sino la desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

### 2. Desigualdad triangular (Minkowski)

sean  $f, g \in L^p(\Omega)$  entonces

$$\|f + g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

$L^p(\Omega)$  provisto de dicha norma es un espacio de Banach. Particularmente para  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, donde su producto escalar esta definido por

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

y su norma asociada por

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Los resultados que se enuncian a continuacion son los principales en cuanto a reflexibilidad, separabilidad y dualidad de los espacios  $L^p(\Omega)$ .

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $p, q \in [0, \infty]$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

1. Si  $1 < p < \infty$ , entonces  $L^p(\Omega)$  es reflexivo, separable y el dual de  $L^p(\Omega)$  se identifica a  $L^q(\Omega)$  esto es  $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ .
2. Si  $p = 1$ , entonces  $L^1(\Omega)$  es separable, por lo tanto  $L^p(\Omega)$  es separable para  $1 \leq p < \infty$ .

El dual de  $L^1(\Omega)$ , es  $L^\infty(\Omega)$ , es decir  $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$

El espacio  $L^1(\Omega)$  no es reflexivo.

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

3. Si  $p = \infty$ , se tiene

$L^\infty(\Omega)$  no es reflexivo, puesto que  $L^1(\Omega)$  no lo es.

$L^\infty(\Omega)$  no es separable.

$L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))^*$ .

### Nociones de convergencia en $L^p(\Omega)$

- *Convergencia fuerte (en norma)* Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ;  $\{\rho_n\}_{n \geq 1} \subset L^p(\Omega)$ ,  $\rho \in L^p(\Omega)$ ,  $\rho_n \longrightarrow \rho$  cuando  $n \longrightarrow \infty$  fuertemente si

$$\|\rho_n - \rho\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Convergencia débil*

- Sea  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y sean  $\rho_n, \rho \in L^p(\Omega)$ . Se dice que  $\rho_n \rightarrow \rho$  cuando  $n \rightarrow \infty$  débilmente si

$$\forall \Psi \in L^q(\Omega), \int_{\Omega} \rho_n \Psi dx \longrightarrow \int_{\Omega} \rho \Psi dx \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

- Sea  $p = \infty$  y sean  $\rho_n, \rho \in L^p(\Omega)$ . Se dice que  $\rho_n \rightarrow \rho$  cuando  $n \rightarrow \infty$  débilmente si

$$\forall \Psi \in L^1(\Omega), \int_{\Omega} \rho_n \Psi dx \longrightarrow \int_{\Omega} \rho \Psi dx \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

### Espacio de las distribuciones

La teoría de distribuciones libera el cálculo diferencial de ciertas dificultades creadas por la existencia de funciones no diferenciables, para conseguirlo el método consiste en extender el cálculo a una clase de nuevas funciones (llamadas distribuciones) mucho más amplia que la clase de funciones diferenciables en el sentido

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

ordinario. Algunas características que tal extensión deberá poseer para ser de utilidad son:

- Toda función continua es una distribución.
- Toda distribución deberá poseer derivadas parciales en el sentido de las distribuciones, que serán también distribuciones.
- Para funciones diferenciables en el sentido ordinario la nueva derivada debe coincidir con la derivada ordinaria.
- Las reglas formales del cálculo deben seguir en vigencia

### Los Espacios $C^\infty(\Omega)$ , $D(\Omega)$

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  una función definida en  $\Omega$ . El soporte de  $u$  lo notaremos con  $Sop(u)$  y es el subconjunto de  $\Omega$  definido por

$$Sop(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}},$$

donde la barra denota la adherencia o clausura del conjunto  $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ .

Luego notamos  $C_0(\Omega)$  el espacio de funciones continuas en  $\Omega$  de soporte compacto contenido en  $\Omega$ . Se designa con  $C^m(\Omega)$  el espacio de funciones reales  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , que poseen derivadas continuas en  $\Omega$  hasta el orden  $m$ , particularmente si  $m = 0$  se tiene  $C^0(\Omega)$  que es el espacio de funciones reales continuas en  $\Omega$ .  $C^0(\overline{\Omega})$  es un espacio de Banach con la siguiente norma:

$$\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$$

Se definen



## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega),$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

El conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  se lo nota generalmente con  $D(\Omega)$ . Un elemento de  $D(\Omega)$  se dice "función test" o "función de base"

**Definición.**-Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Una distribución sobre  $\Omega$  es todo funcional  $T$  lineal y continuo sobre  $D(\Omega)$ . El conjunto de todas las distribuciones sobre  $\Omega$  se designa con  $D'(\Omega)$

### Derivación en el sentido de las distribuciones

**Definición.**-Sea  $T$  una distribución sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . La derivada  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  en el sentido de las distribuciones se define por :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \rho \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \rho \in D(\Omega).$$

Siendo la derivada de  $T$  lineal y continua sobre  $D(\Omega)$ , por lo tanto es una distribución.

Sea  $f \in C^1(\Omega)$ . Se denota con  $T_f$  a la distribución asociada a  $f$  y está definida por

$$\langle T_f, \rho \rangle = \int_{\Omega} f \rho dx \quad \forall \rho \in D(\Omega).$$

Las derivadas de orden dos  $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$  de una distribución  $T$  se define mediante la relación

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \rho \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \quad \forall \rho \in D(\Omega),$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \rho \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} \right\rangle \quad \forall \rho \in D(\Omega).$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

### Espacios de Sobolev

Espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $1 \leq p < \infty$ . Se define el espacio  $W^{1,p}(\Omega)$  como se sigue

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, g_2, g_3, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tales que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \rho dx \quad \forall \rho \in D(\Omega) \quad \forall i = 1..n \right\}$$

donde  $g_i$  se nota de la manera siguiente  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ , o lo que es lo mismo de una manera más simplificada

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1..n \right\}$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  es la derivada de  $u$  con respecto a  $x_i$  en el sentido de las distribuciones. el espacio  $W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach dotado de las siguientes normas equivalentes entre si

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Las principales propiedades del espacio  $W^{1,p}(\Omega)$  son las siguientes:

- $W^{1,p}(\Omega)$  es reflexivo para  $1 \leq p < \infty$ .
- $W^{1,p}(\Omega)$  es separable para  $1 \leq p < \infty$ .
- $W^{1,2}(\Omega)$  es notado como  $H^1(\Omega)$  y se define como se sigue

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ \forall i = 1 \dots n \right\}$$

El espacio  $H^1(\Omega)$  es de suma importancia en nuestro estudio.  $H^1(\Omega)$  está dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

y su norma asociada es

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right)^{1/2}.$$

Se tiene que  $H^1(\Omega)$  con este producto escalar y esta norma asociada es un espacio de Hilbert separable. Además se tiene que

$$D(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \approx (L^2(\Omega))^* \subset D'(\Omega).$$

### Inmersiones de Sobolev

Algunos resultados importantes que relacionan los espacios  $L^p(\Omega)$  y  $W^{1,p}(\Omega)$  son los que siguen

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado de frontera lipschisiana

1. Si  $1 \leq p < n$ , entonces  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \forall q \in [1, p^*]$  donde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
2. Si  $p = n$  entonces  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \forall q \in [1, \infty[$ .
3. Si  $p > n$  entonces  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$  con inyecciones compactas.

En particular  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  con inyecciones compactas para todo  $p$ , de acuerdo con esto se tiene

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

4. Si  $n > 2$  entonces  $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^{p^*}(\Omega)$  con  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
5. Si  $n = 2$ ,  $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^p(\Omega)$  para todo  $p$  finito.
6. Si  $n = 1$  entonces  $H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ .

### Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Sea  $1 \leq p < \infty$ . Se define  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como la adherencia de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ , esto es  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ . El espacio  $W_0^{1,p}(\Omega)$  dotado de la norma inducida por  $W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach separable y si  $1 < p < \infty$  entonces  $W_0^{1,p}(\Omega)$  es reflexivo.

Notamos  $W_0^{1,2}(\Omega)$  como  $H_0^1(\Omega)$ . Las funciones de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  son en cierto modo funciones de  $W^{1,p}(\Omega)$  que se anulan sobre la frontera de  $\Omega$ . así mismo se nota con  $H^{-1}(\Omega)$  el espacio dual de  $H_0^1(\Omega)$ , esto es  $H^{-1}(\Omega)$  es el espacio vectorial de todas las formas lineales continuas sobre  $H_0^1(\Omega)$ . En  $H^{-1}(\Omega)$  se define la norma

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle T, v \rangle|,$$

donde  $\langle T, v \rangle$  denota el par en dualidad.

### Distribuciones Vectoriales

**El espacio  $C^k(0, T; V)$ .** Sea  $V$  un espacio de Banach de norma  $\|\cdot\|_V$ ,  $k \geq 0$  y  $0 < T < +\infty$ . Se define el espacio  $C^k(0, T; V)$  como el espacio de funciones  $k$  veces continuamente diferenciables sobre  $[0, T]$  a valores en  $V$ . Es fácil ver que es un espacio de Banach con norma:

$$\|v\|_{C^{jk}(0, T, V)} = \max_{0 \leq l \leq k} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^l v}{dt^l}(t) \right\|_V \right)$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

**El espacio  $L^p(0, T; V)$ .**- Sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq +\infty$ , definimos  $L^p(0, T; V)$  el espacio de funciones de  $]0, T[$  en  $V$  fuertemente medibles sobre  $[0, T]$  para la medida  $dt$  con norma:

$$\|v\|_{L^p(0, T; V)} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

Con la norma anterior  $L^p(0, T; V)$  es un espacio de Banach.

Si  $V$  es un espacio de Hilbert con producto escalar  $(\cdot, \cdot)_V$  entonces,  $L^p(0, T; V)$  es un espacio de Hilbert con producto escalar:

$$(u, v)_{L^p(0, T; V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt.$$

Se debe tomar en cuenta que si  $u \in L^2(0, T; V)$  y  $v \in V$ , entonces la función  $t \rightarrow (u(t), v)_V \in L^2(0, T; V)$ .

### Operadores monótonos

Sea  $V$  un espacio de Banach real, separable. Se denota con  $\|\cdot\|_V$  la norma en  $V$  y con  $V^*$  el espacio dual de  $V$  provisto de la norma

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle f, v \rangle|,$$

donde  $\langle f, v \rangle$  denota el valor del funcional  $f \in V^*$  en  $v \in V$ .

Sea  $T : V \rightarrow V^*$  un funcional definido en  $V$ .

**Definición.**-El operador  $T$  se dice monótono si para todo  $x, y \in V$ ,

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0.$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

**Definición.-**El operador  $T$  se dice estrictamente monótono si  $T$  es monótono, y

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle > 0 \quad \forall x, y \in V, x \neq y.$$

**Definición.-**Se dice que  $T$  es fuertemente monótono si para todo  $x, y \in V$ ,

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \|x - y\|_V \varphi(\|x - y\|_V),$$

donde  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua en  $\mathbb{R}_+$  tal que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(t) > 0$  para  $t > 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ .

**Definición.-**Se dice que  $T$  es coercivo si

$$\langle T(x), x \rangle \geq \|x\|_V \gamma(\|x\|_V) \quad \forall x \in V,$$

donde  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $\mathbb{R}_+$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ .

Se demuestra que todo operador fuertemente monótono es coercivo.

**Teorema (Brower).**-Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua tal que

$$T\left(\overline{B(0, R)}\right) = \overline{B(0, R)}, \quad R > 0.$$

Existe  $\hat{x} \in \overline{B(0, R)}$  tal que  $T(\hat{x}) = \hat{x}$ .

Nota:  $\overline{B(0, R)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ .

**Teorema.-**Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador continuo y coercivo. Entonces  $T$  es sobreyectivo.

**Corolario.-**Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador continuo. Si para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , existe  $C > 0$  tal que

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq C \|x - y\|^2,$$

entonces la ecuación  $T(x) = 0$  tiene una única raíz  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Corolario.**—Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador continuo y monótono. Supongamos que existe  $R > 0$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $\|x\| > R$  se tiene

$$\langle T(x), x \rangle \geq 0.$$

entonces, la ecuación  $T(x) = 0$  tiene una única solución  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\hat{x}\| \leq R$ .

**Teorema** (Brower-Minty).—Sean  $V$  un espacio de Banach real, reflexivo, separable con  $V^*$  su espacio dual y  $T : V \rightarrow V^*$  un operador monótono, coercivo, continuo. Entonces  $T$  es sobreyectivo. Para  $f \in V^*$  fijo,  $T^{-1}(f)$  es un subconjunto acotado, cerrado y convexo de  $V$ .

## 4.2. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA

### 4.2.1. Ecuación tipo elíptica no lineal

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, acotado, de frontera  $\Gamma$  lipschisiana a trozos. Se considera el problema  $(PE)$  siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar una función } u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ solución de} \\ -\operatorname{div}(\kappa(u) \nabla u) + g(x, u) = f \text{ sobre } \Omega, \ x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (PE)$$

donde  $\kappa$ ,  $f$ ,  $g$  son funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

1. La función real  $\kappa$  definida en todo  $\mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ , esto es,  $\kappa \in C^1(\mathbb{R})$ . Además, existen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\alpha_1 < \alpha_2$  y  $\alpha_1 \leq \kappa(u) \leq \alpha_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}$ .
2. La función real  $g$  está definida en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  y es de clase  $C^1$ , o sea  $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ , tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) &\geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall u \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) &\leq g_1(x) + g_2(x) |u|^{p-1} \quad x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde  $g_1, g_2 \in C(\bar{\Omega})$  y  $p > 2$ .

3.  $f \in L^q(\Omega)$ .

La ecuación en derivadas parciales dada en el problema  $(PE)$  es del tipo elíptico no lineal.

### Formulación débil de $(PE)$

Supongamos que  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  es la solución del problema  $(PE)$ . multipliquemos a la ecuación por una función  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $v|_{\Gamma} = 0$  e integremos sobre  $\Omega$ , tenemos

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\kappa(u(x)) \nabla u(x)) v(x) dx + \int_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$$

y por el teorema de Green-Gauss, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \kappa(u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} v(x) \vec{u}(x) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} g(x, u(x)) v dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \end{aligned}$$

y como  $v|_{\Gamma} = 0$  se sigue que  $\int_{\Gamma} v \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0$ ; en consecuencia

$$\int_{\Omega} \kappa(u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} g(x, u(x)) v dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$



#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

Esta última igualdad conduce a proponer una formulación débil del problema  $(PE)$ . de la siguiente manera:

Definimos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \kappa(u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

donde

$$|a(u, v)| \leq \alpha_2 \|u\|_{1,p} \|v\|_{1,p} \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Las hipótesis sobre la función  $g$  implican  $\int_{\Omega} |g(x, u(x))|^p dx < \infty$  y en consecuencia  $u \mapsto g(\cdot, u(\cdot))$  es una función de  $L^p(\Omega)$  en  $L^p(\Omega)$ . Se pone

$$b(u, v) = \int_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definimos

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

de lo cual se desprende inmediatamente que  $L \in W^{-1,q}(\Omega)$ .

Luego la formulación débil de  $(PE)$  es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución de} \\ a(u, v) + b(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (PED)$$

En los capítulos siguientes se demuestra que este problema tiene solución única  $\hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$

### 4.2.2. Ecuación del tipo parabólico no lineal

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, acotado, de frontera  $\Gamma$  lipschisiana a trozos,  $T > 0$ . Ponemos  $\Omega_T = \Omega \times ]0, T[$ ,  $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\Gamma_T = \Gamma \times ]0, T[$ .

Consideraremos el problema  $(PP)$  siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar una función } u : \overline{\Omega}_T \longrightarrow \mathbb{R} \text{ solución de} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) + g(x, u) = f \text{ sobre } \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \overline{\Omega} \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_T \end{array} \right. \quad (PP)$$

donde las funciones  $\kappa$ ,  $g$  satisfacen las mismas hipótesis establecidas para el problema  $(PE)$ ,  $f$  es una función definida en  $\Omega_T$ , y suponemos que para cada  $t \in [0, T]$ ,  $f(\cdot, t) \in L^q(\Omega)$ .

#### Formulación débil

Para la obtención de una formulación débil, procedemos del modo siguiente. Multipliquemos a la ecuación diferencial del problema  $(PE)$  por una función  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $v|_{\Gamma} = 0$ , e integremos sobre  $\Omega$ . tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa(x) \nabla u(x, t)) v(x) dx + \int_{\Omega} g(x, u(x, t)) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx. \end{aligned}$$

por el teorema de derivación bajo el signo de integración, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx.$$

ahora, por el teorema de Green-Gauss,

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t)) v(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma} v(x) \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \vec{n} ds \end{aligned}$$

y debido a que  $v|_{\Gamma} = 0$ , se tiene  $\int_{\Gamma} v(x) \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \vec{n} ds = 0$ .

Reemplazando estos resultados se obtiene la siguiente ecuación, para todo  $v \in C^1(\overline{\Omega_T})$  tal que  $v|_{\Gamma} = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} g(x, u(x, t)) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx. \end{aligned}$$

Realizamos las siguientes identificaciones: para cada  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} u(t) : \overline{\Omega} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (u(t))(x) = u(x, t), \\ f(t) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f(t))(x) = f(x, t). \end{aligned}$$

Para cada  $t \in [0, T]$ , se define

$$\begin{aligned} \langle u(t), v \rangle &= \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ a(u(t), v) &= \int_{\Omega} \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ b(u(t), v) &= \int_{\Omega} g(x, u(x, t)) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \langle f(t), v \rangle &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \langle u(0), v \rangle &= \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

con estas notaciones la formulación débil del problema parabólico (*PPD*) se escribe

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)) \\ \text{donde } u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega)), \text{ tal que es solución de:} \\ \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) + b(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \langle u(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right. \quad (PPD)$$

### 4.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DÉBIL

#### Ecuación elíptica no lineal

Sea  $\Omega$  un abierto, acotado, de frontera  $\Gamma$  lipschitziana a trozos. Se considera el problema  $(PE)$  siguiente. Hallar una función  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (k(u) \nabla u) + g(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma \end{array} \right.$$

donde  $k, f, g$  son funciones dadas. que verifican.

1.  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^1$  tal que

$$k(u) \geq \alpha > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Definimos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} k(u) \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

2.  $|a(u, v)| \leq \gamma (\|u\|_{1,p}) \|v\|_{1,p} \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , donde  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua.

Para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , fijo, la aplicación  $v \rightarrow a(u, v)$  de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  en  $\mathbb{R}$  define una forma lineal continua  $T(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \langle T(u), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\|T(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \gamma(\|u\|_{1,p}).$$

3.  $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^1$  tal que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x, u) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x, u) \leq g_1(x) + g_2(x)|u|^{p-1} \quad x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}.$$

Resulta que  $\int_{\Omega} |g(x, u(x))|^p dx < \infty$  y en consecuencia  $u \mapsto g(\cdot, u(\cdot))$  es una función de  $L^p(\Omega)$  en  $L^p(\Omega)$ .

A la función  $g$  asociamos el operador de Nemitskii  $G$  definido por

$$\langle G(u), v \rangle = \int_{\Omega} g(x, u) v dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y definimos

$$b(u, v) = \langle G(u), v \rangle \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

4.  $f \in L^p(\Omega)$ .

Definimos  $L(v) = \int_{\Omega} f v \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces  $L \in W^{-1,q}(\Omega)$ . El problema débil de  $(PE)$  es el siguiente:

Hallar  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  solución de

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución de} \\ a(u, v) + b(u, v) = L(v), \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \quad (PEF)$$

que es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución de} \\ T(u) + G(u) = L. \end{cases} \quad (PEM)$$

Para demostrar que el problema  $(PEF)$  o su equivalente  $(PEM)$  tienen solución efectuamos el siguiente cambio de variable.

Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$h(u) = \int_0^u k(t)dt, \quad u \in \mathbb{R}$$

$h$  es creciente, además  $h \in C^1(\mathbb{R})$ .

Para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se tiene que  $w = h(u)$  implica  $u = h^{-1}(w)$  y  $\nabla w = k(u)\nabla u$ .

Puesto que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} k(u) \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} g(x, u) v dx = \int_{\Omega} g(x, h^{-1}(w)) v dx, \end{aligned}$$

el problema  $(PEF)$  se transforma en el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } w \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ solución de} \\ \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, h^{-1}(w)) v dx = L(v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Definimos

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{-1,q}(\Omega) \\ u &\rightarrow F(u), \end{aligned}$$

donde  $F(w)$  está definido por

$$\langle F(w), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, h^{-1}(w)) v dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Probemos que  $F$  es monótono. Para el efecto, mostremos que

$$DF(w) \in \mathcal{L} \left( W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,q}(\Omega) \right).$$

CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\begin{aligned}
\langle F(w+z) - F(w), v \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla(w+z) - \nabla w) \cdot \nabla v dx \\
&+ \int_{\Omega} [g(x, h^{-1}(w+z)) - g(x, h^{-1}(w))] v dx \\
\langle F(w+z) - F(w), v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(w) + t\theta)(h^{-1}(w+z) - h^{-1}(w)) v dx \\
\langle F(w+z) - F(w), v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(w) + t\theta)(h^{-1}(w) + t_1\theta_1)' z v dx \\
\langle F(w+z) - F(w), v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(w) + t\theta) \frac{1}{k(u) + t_1\theta_1} z v dx
\end{aligned}$$

donde  $t, t_1 \in ]0, 1[$  y  $\theta, \theta_1 \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $\theta$  yace entre  $h^{-1}(w+z)$  y  $h^{-1}(w)$  y  $\theta_1$  yace entre  $w$  y  $w+z$  respectivamente.

Resulta que

$$\langle DF(w)z, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(w)) \frac{1}{k(u)} z v.$$

Para  $z = v$  se tiene

$$\begin{aligned}
\langle DF(w)z, v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(w)) \frac{1}{k(u)} v^2 dx \\
&\geq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

es decir que  $DF(w)$  es un operador monótono.

De este último resultado se sigue que

$$\langle F(w) - F(z), w - z \rangle = \langle DF(w + t\theta)(w - z), w - z \rangle,$$

con  $t \in ]0, 1[$ ,  $\theta$  entre  $w$  y  $z$ . Luego

$$\langle F(w) - F(z), w - z \rangle \geq 0, \quad \forall w, z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

es decir que  $F$  es un operador fuertemente monótono. En consecuencia, existe un único  $\widehat{w} \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que

$$\langle F(\widehat{w}), v \rangle = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{w} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, h^{-1}(\widehat{w})) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Puesto que  $\widehat{w} = h(\hat{u})$ , se sigue que existe  $\hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$  solución de

$$\int_{\Omega} k(\hat{u}) \nabla \hat{u} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, \hat{u}) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o sea

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, v) + b(\hat{u}, v) &= L(v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ T(\hat{u}) + G(\hat{u}) &= L. \end{aligned}$$

Si  $\Phi = T + G$ , entonces

$$\Phi(\hat{u}) = L \implies \hat{u} = \Phi^{-1}(L).$$

### Ecuación del tipo parabólico no lineal

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, acotado de frontera  $\Gamma$  lipschitziana a trozos,  $T > 0$ . Ponemos  $\Omega_T = \Omega \times ]0, T[$ ,  $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  y  $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$ .

En esta sección consideramos una ecuación del tipo parabólico no lineal siguiente:



CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(u) \nabla u) + g(x, u) = f \text{ sobre } \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega} \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_T. \end{cases} \quad (PP)$$

donde  $\kappa$ ,  $f$ ,  $g$  son funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

1. La función real  $\kappa$  definida en todo  $\mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ , esto es,  $\kappa \in C^1(\mathbb{R})$ . Además, existen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\alpha_1 < \alpha_2$  y  $\alpha_1 \leq \kappa(u) \leq \alpha_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}$ .
2. La función real  $g$  está definida en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  y es de clase  $C^1$ , o sea  $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ , tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) &\geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall u \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) &\leq g_1(x) + g_2(x) |u|^{p-1} \quad x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde  $g_1, g_2 \in C(\bar{\Omega})$  y  $p > 2$ .

Consideramos el problema débil siguiente

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)) \\ \text{donde } u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega)), \text{ tal que es solución de:} \\ \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) + b(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \langle u(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (PPD)$$

Donde para cada  $t \in [0, T]$ , se define

$$\begin{aligned} \langle u(t), v \rangle &= \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ a(u(t), v) &= \int_{\Omega} \kappa(u(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ b(u(t), v) &= \int_{\Omega} g(x, u(x, t)) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \langle f(t), v \rangle &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \langle u(0), v \rangle &= \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

La demostración se la realizará por el método de Galerkin

Recordemos en primer lugar que  $H_0^1(\Omega)$  y  $L^2(\Omega)$  son espacios de Hilbert separables, además  $H_0^1(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$  por tanto, existe una base hilbertiana  $\{w_k / k = 0, 1, 2, \dots\}$  de  $L^2(\Omega)$  que la consideraremos ortogonal en  $H_0^1(\Omega)$  y ortonormal en  $L^2(\Omega)$ , tal que cualesquier elemento de  $H_0^1(\Omega)$  o de  $L^2(\Omega)$  pueden ser escritos como serie de Fourier respecto a dicha base, fijado  $n \in \mathbb{N}$  vamos a llamar  $V_n = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$  al subespacio vectorial de dimensión finita engendrado por los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Luego dado  $v \in H_0^1(\Omega)$  ( respectivamente  $v \in L^2(\Omega)$  ) existe una sucesión  $\{v_n / v_n \in V_n\}$  tal que

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)} &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Respectivamente

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Dado  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , existe  $\{u_{0,n} / u_{0,n} \in V_n\}$  tal que  $\|u_{0,n} - u_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ ;  $n \rightarrow \infty$  basta tomar  $u_{0,n} = P_{V_n}(u_0)$  (la proyección de  $u_0$  sobre el espacio  $V_n$ ). De esta manera, planteamos el problema aproximado  $P_n$  siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_n \in L^p(0, T; V_n) \text{ solución de} \\ \frac{d}{dt} \langle u_n(t), v_n \rangle + a(u_n(t), v_n) + b(u_n(t), v_n) = \langle f(t), v_n \rangle \quad \forall v_n \in V_n \quad (P_n) \\ u_n(0) = u_{0,n}, \end{array} \right.$$

como  $u_n(t) \in V_n$  entonces existe  $\{\alpha_i^n(t) / i = 0, 1, \dots, n\}$  tal que

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n(t) w_i$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

por lo que  $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n(0)w_i$  donde  $\alpha_i^n(0) = \langle u_{0,n} / w_i \rangle$  luego nuestro problema aproximado es el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \alpha_i^n(t) ; i = 0, 1, 2 \dots n \text{ solución de} \\ \frac{d}{dt} \alpha_j^n(t) = \langle f(t), w_j \rangle - a \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n(t)w_i, w_j \right) - b \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n(t)w_i, w_j \right) \\ \alpha_j^n(0) = \langle u_{0,n} / w_j \rangle \quad \forall j = 0, 1 \dots n ; \quad t \in (0, T) \end{array} \right.$$

Por el teorema de Cauchy-Peano y dado que el lado derecho es una función continua de  $t, \alpha_1^n(t), \alpha_2^n(t), \dots, \alpha_n^n(t)$  el problema aproximado  $(Pn)$  anterior tiene por lo menos una solución

### 1. Estimaciones de Energía

Tomando en  $Pn$  la función  $v_n$  como  $u_n(t)$  se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_n(t), u_n(t)) + b(u_n(t), u_n(t)) \\ &= \langle f(t), u_n(t) \rangle \quad \forall v_n \in V_n, \quad t \in (0, T) \end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq a(u_n(t), u_n(t)) = \int_{\Omega} \kappa(u_n(t)) \nabla u_n(t) \cdot \nabla u_n(t) dx, \\ \beta \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq b(u_n(t), u_n(t)) = \int_{\Omega} g(x, u_n(t)) u_n(t) dx \\ \langle f(t), u_n(t) \rangle &\leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{m}{2} \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_n(t), u_n(t)) + b(u_n(t), u_n(t)) \\ &= \langle f(t), u_n(t) \rangle \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

donde  $\frac{m}{2} = \min \{\alpha_1, \beta\}$  de lo cual se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (4.1)$$

usando la desigualdad de Gronwall se tiene la siguiente estimación:

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^t \left[ \|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(r)\|_{L^2(\Omega)}^2 dr \right]$$

por la desigualdad de Bessel es claro que  $\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ , integrando en  $(0, T)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq e^T \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(r)\|_{L^2(\Omega)}^2 dr \right] \\ &= C \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned}$$

Luego para todo  $t \in (0, T)$  se tiene que  $u_n(t)$  esta acotado en  $L^2(\Omega)$  es decir que  $\{u_n(t)\}_{n \geq 1}$  está acotado en  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$

2. Por otro lado de 4,1 se tiene que

$$\begin{aligned} m \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned}$$

luego

$$\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq M \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \quad t \in (0, T)$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

integrando entre  $(0, T)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq M \int_0^T \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] dt \\ &= C_2 \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned}$$

lo cual nos indica que la sucesión  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  está acotada en  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

3. Sea  $v \in H_0^1(\Omega)$  con  $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$  y escribimos  $v = a + b$  donde  $a \in V_n$  y  $b \in V_n^\perp$  (el ortogonal de  $V_n$ ) luego  $\|a\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$  y utilizando  $(Pn)$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_n(t), a \rangle + a \langle u_n(t), a \rangle + b \langle u_n(t), a \rangle \\ = \langle f(t), a \rangle \quad \forall v_n \in V_n, t \in (0, T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_n(t), a \rangle &= \langle f(t), a \rangle - a \langle u_n(t), a \rangle - b \langle u_n(t), a \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle u_n(t), v \rangle &= \langle f(t), a \rangle - a \langle u_n(t), a \rangle - b \langle u_n(t), a \rangle \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_n(t), v \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u_n(t), a + b \rangle \\ &= \frac{d}{dt} [\langle u_n(t), a \rangle + \langle u_n(t), b \rangle] \\ &= \frac{d}{dt} \langle u_n(t), a \rangle \end{aligned}$$

por otro lado tome en cuenta que

$$\begin{aligned} |a \langle u_n(t), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \kappa(u_n(t)) \nabla u_n(t) \cdot \nabla v dx \right| \leq \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla u_n(t) \cdot \nabla v| dx \\ |b \langle u_n(t), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} g(x, u_n(t)) v dx \right| \leq \beta_2 \int_{\Omega} |u_n(t) v| dx \\ |a \langle u_n(t), v \rangle| + |b \langle u_n(t), v \rangle| &\leq \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla u_n(t) \cdot \nabla v| dx + \beta_2 \int_{\Omega} |u_n(t) v| dx \\ &\leq C_3 \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_3 \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq M \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

de aquí se tiene que

$$\begin{aligned}
 \left| \left\langle \frac{d}{dt} u_n(t), v \right\rangle \right| &\leq |\langle f(t), a \rangle| + |a(u_n(t), a)| + |b(u_n(t), a)| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &\leq C_3 \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right]
 \end{aligned}$$

recordemos que  $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$  por lo tanto

$$\begin{aligned}
 &\frac{\left\langle \frac{d}{dt} u_n(t), v \right\rangle}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
 &\leq C_3 \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0, t \in (0, T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\| \frac{d}{dt} u_n(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
 &\leq C_3 \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] \quad \text{para todo } t \in (0, T)
 \end{aligned}$$

elevando al cuadrado los dos lados de la desigualdad he integrando sobre  $(0, T)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left\| \frac{d}{dt} u_n(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt &\leq C_3 \int_0^T \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] dt \\
 \|u_n'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq C_4 \left[ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right]
 \end{aligned}$$

luego  $u_n'$  es acotada en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

### Existencia de solución

Por 1,2 y 3 se tiene que la sucesión  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  tiene una subsucesión  $\{u_{n_i}\}_{n \geq 1}$  covergente luego existe  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  con  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  tal que

$$\begin{cases} u_{n_i} \rightarrow u \text{ debilmente en } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u_{n_i}' \rightarrow u' \text{ debilmente en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \end{cases} \quad (4.2)$$

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

Considere  $N$  un entero positivo fijo y elejimos  $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$  el cual tiene la forma siguiente

$$v(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) w_i$$

donde  $\{\alpha_i(t)\}$  son funciones suaves dadas, nosotros elejimos  $n \geq N$  reemplazamos e  $(Pn)$  e integramos con respecto a  $t$  encontrando la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \left\langle \frac{d}{dt} u_n(t), v(t) \right\rangle + a(u_n(t), v(t)) + b(u_n(t), v(t)) \right] dt \\ = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

consideramos  $n = n_i$  (es decir la subsucesión debilmente convergente), y teniendo en cuenta (4,2), pasando al límite débil encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \left\langle \frac{d}{dt} u(t), v(t) \right\rangle + a(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \right] dt = \\ = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta igualdad es mucho más general es válida para todas las funciones de  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  ya que las funciones de la forma  $v(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) w_i$  son densas en este espacio y en particular se tiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} u(t), v(t) \right\rangle + a(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) dt \\ = \langle f(t), v(t) \rangle dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ y } t \in (0, T) \end{aligned}$$

además como  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  y  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  se tiene que

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$$

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

Seguidamente probaremos que  $u(0) = u_0$  para lo cual integramos por partes las expresiones (4,3) y (4,4)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[ - \left\langle \frac{d}{dt} u_n(t), v(t) \right\rangle + a(u_n(t), v(t)) + b(u_n(t), v(t)) \right] dt \\
 = & \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + (u_n(0)v(0)) \quad \forall v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \text{ con } v(T) = 0 \\
 & \int_0^T \left[ - \left\langle \frac{d}{dt} u(t), v(t) \right\rangle + a(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \right] dt \\
 = & \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + (u(0)v(0)) \quad \forall v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \text{ con } v(T) = 0
 \end{aligned}$$

haciendo otra vez tender al límite en la primera expresión se tiene

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[ - \left\langle \frac{d}{dt} u(t), v(t) \right\rangle + a(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \right] dt \\
 = & \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + (u_0 v(0)) \quad \forall v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \text{ con } v(T) = 0 \\
 & \int_0^T \left[ - \left\langle \frac{d}{dt} u(t), v(t) \right\rangle + a(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \right] dt \\
 = & \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + (u(0)v(0)), \quad \forall v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \text{ con } v(T) = 0
 \end{aligned}$$

finalmente igualando las dos expresiones se tiene que  $u_n(0) \rightarrow u_0$  en  $L^2(\Omega)$  como  $v(0)$  es arbitrario se concluye que  $u(0) = u_0$

#### Unicidad de la solución

Como de costumbre suponga que el problema débil tiene dos soluciones  $u_1$  y



#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$u_2$ , luego las dos funciones cumplen con la ecuación, así que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_1(t), v \rangle + a(u_1(t), v) + b(u_1(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ y } t \in (0, T) \\ \langle u_1(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_2(t), v \rangle + a(u_2(t), v) + b(u_2(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ y } t \in (0, T) \\ \langle u_2(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Restando el segundo problema del primero se obtiene que

$$\begin{cases} \left\langle \frac{d}{dt} (u_1(t) - u_2(t)), v \right\rangle + [a(u_1(t), v) - a(u_2(t), v)] \\ + [b(u_1(t), v) - b(u_2(t), v)] = 0 \\ \langle u_1(0) - u_2(0), v \rangle = 0 \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ y } t \in (0, T) \end{cases} \quad (4.5)$$

Por otro lado efectuamos nuevamente el cambio de variables siguiente.

Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$h(u) = \int_0^u k(t) dt, \quad u \in \mathbb{R}$$

$h$  es creciente, además  $h \in C^1(\mathbb{R})$ .

Para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se tiene que  $w = h(u)$  implica  $u = h^{-1}(w)$  y  $\nabla w = k(u) \nabla u$ .

Puesto que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} k(u) \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} g(x, u) v dx = \int_{\Omega} g(x, h^{-1}(w)) v dx, \end{aligned}$$

de aquí se tiene que

CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\begin{aligned}
 [a(u_1(t), v) - a(u_2(t), v)] &= \int_{\Omega} k(u_1(t)) \nabla u_1(t) \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} k(u_2(t)) \nabla u_2(t) \cdot \nabla v dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla w_1 \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} \nabla w_2 \cdot \nabla v dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla(w_1 - w_2) \cdot \nabla v dx
 \end{aligned}$$

donde  $w_1 = h(u_1)$ ,  $w_2 = h(u_2)$

$$\begin{aligned}
 [g(x, u_1(t)) - g(x, u_2(t))] &= [g(x, h^{-1}(w_1)) - g(x, h^{-1}(w_2))] \\
 &= M[w_1 - w_2]
 \end{aligned}$$

esto por el teorema del valor medio, por la tanto

$$M = \frac{\partial g}{\partial u}(x, h^{-1}(c)) \frac{\partial h^{-1}(c)}{\partial u} > 0 \text{ para algún } c \in [u_1, u_2]$$

por la parte anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 [b(u_1(t), v) - b(u_2(t), v)] &= \int_{\Omega} g(x, u_1(t)) v dx - \int_{\Omega} g(x, u_2(t)) v dx \\
 &= \int_{\Omega} [g(x, u_1(t)) - g(x, u_2(t))] v dx \\
 &= M \int_{\Omega} [w_1 - w_2] v dx
 \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
 w_1 - w_2 &= h(u_1) - h(u_2) \\
 &R(u_1 - u_2)
 \end{aligned}$$

#### CAPÍTULO 4. ECUACIÓN DE RICHARDS EXISTENCIA Y UNICIDAD

donde el resultado se obtiene aplicando nuevamente el teorema del valor medio, luego

$$R = \frac{\partial h(c)}{\partial u} > 0 \text{ para algun } c \in [u_1, u_2]$$

Haciendo  $v = w_1 - w_2$  en (4,5) y teniendo en cuenta todo lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} (u_1(t) - u_2(t)), w_1 - w_2 \right\rangle + [a(u_1(t), w_1 - w_2) - a(u_2(t), w_1 - w_2)] \\ & + [b(u_1(t), w_1 - w_2) - b(u_2(t), w_1 - w_2)] \\ = & \left\langle \frac{d}{dt} (u_1(t) - u_2(t)), R(u_1(t) - u_2(t)) \right\rangle \\ & + \int_{\Omega} |\nabla(w_1 - w_2)|^2 dx + M \int_{\Omega} |w_1 - w_2|^2 dx \\ = & \frac{R}{2} \frac{d}{dt} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + M \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \end{aligned}$$

tomando  $C = \min \{1, M\}$  se deduce que

$$\begin{aligned} & C \|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq & \frac{R}{2} \frac{d}{dt} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + M \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $\|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = R \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 0$  de lo cual se deduce inmediatamente que  $u_1 = u_2$

# **CAPÍTULO 5**

## **DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D**

### **5.1. INTRODUCCIÓN**

Para la resolución numérica de este tipo de ecuaciones se utiliza el método de elementos finitos, usando el algoritmo de Newton-Raphson (Smith-Parlange 1978) para la parte espacial y el esquema de Crank-Nicolson en la parte temporal, así mismo existe una extensa bibliografía sobre el tema se ha preferido usar el libro de análisis numérico del profesor Hernán Benalcázar (2011)[3], las notas de clase del profesor Claude Carasso (1999) y la tesis de Albuja-Naula (2000)[5] entre otros.

### **5.2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Muchos problemas de importancia práctica que frecuentemente aparecen en ingeniería, resultan de una complejidad matemática tal que, aunque la deducción de

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

las ecuaciones diferenciales que gobiernan tales problemas no resulta muy difícil, su solución por métodos exactos de análisis, aún después de introducir algunas hipótesis simplificadoras, no se logra sino para ciertos problemas de geometría, condiciones de contorno simples. Por esto, aunque las soluciones analíticas son las que más información proporcionan sobre el comportamiento de un problema dado, se debe recurrir a los métodos numéricos. Los usados son el de elementos finitos, de diferencias finitas, de volumen de control y de contorno, aunque estos son apenas algunos, entre una gran gama de métodos numéricos que se han venido desarrollando y usando exitosamente, en la solución de muchos problemas en distintas áreas de la ciencia. Aún cuando todos estos métodos constituyen una muy poderosa herramienta matemática, no dejan de ser métodos aproximados, debiéndose tener por lo tanto un especial cuidado en su utilización, ya que la calidad de las soluciones que se obtengan depende de varios factores.

Entre las técnicas numéricas ya mencionadas, una de las que más se ha destacado desde hace aproximadamente cuarenta años, tanto por su capacidad para modelar dominios irregulares, condiciones de contorno, no linealidades y una gran cantidad de características que aparecen en la mayoría de los problemas de interés práctico.

### 5.2.1. Breve reseña histórica

La idea de representar un dominio mediante un conjunto de elementos discretos, no aparece con el método de elementos finitos (M.E.F.) . En efecto, los antiguos matemáticos usaban “elementos finitos” para hallar el valor de  $\pi$  en forma bastante aproximada. Dicha aproximación la realizaban limitando un círculo con polígonos (inscritos o circunscritos), de tal modo que los segmentos de rectas (elementos finitos), aproximasen la circunferencia del círculo. De este modo, ellos estaban en capacidad de obtener estimaciones muy exactas del valor de  $\pi$  (casi cuarenta dígitos).

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

Arquímedes (287 a.c.) usó las mismas ideas para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos aunque, por supuesto, no tenía el conocimiento del procedimiento de límite. Realmente, fue sólo éste desconocimiento lo que impidió que Arquímedes descubriera el cálculo integral alrededor de dos mil años antes que lo hicieran Newton y Leibniz. Es importante entonces destacar que, mientras la mayoría de los problemas de la matemática aplicada están descritos en términos de ecuaciones diferenciales, la solución de éstas mediante el M.E.F., utiliza ideas que son, en mucho, más viejas que las usadas para establecerlas.

Muchos han sido los investigadores, tanto en el área de la ingeniería, como en el área de la mecánica aplicada que han participado en el desarrollo del M.E.F. En 1909, Ritz desarrolló un método muy poderoso con el cual se puede obtener soluciones aproximadas, de problemas asociados al campo de la mecánica del continuo. En este método, se asume la “forma” de las incógnitas involucradas en el problema, en términos de unas funciones de aproximación conocidas y unos parámetros a determinar. La introducción de estas funciones en el funcional que describe el problema en estudio, y su posterior diferenciación con respecto a los referidos parámetros, produce una ecuación la cual es igualada a cero. Si existen  $n$  parámetros desconocidos, se formará un sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas. La solución de dicho sistema permite determinar dichos parámetros y, por lo tanto, obtener la solución aproximada del problema. Este método es similar a la estimación de los parámetros de ajuste en los problemas de mínimos cuadrados. La limitación más severa del método de Ritz, está en el hecho que las funciones de aproximación, deben verificar las condiciones de contorno especificadas en el problema en estudio, lo cual restringe la aplicación del método a aquellos problemas con dominios de forma geométrica relativamente simples.

En 1943, Courant hizo una muy significativa extensión del método de Ritz introduciendo funciones seccionalmente continuas, definidas sobre áreas triangulares, lo

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

cual, conjuntamente con el principio de mínima energía potencial, le permitió estudiar problemas de torsión. En estos problemas, las incógnitas se seleccionaron de tal modo que fueran iguales a los valores de las funciones, en los puntos de interconexión de las áreas triangulares. Por otro lado, la limitación del método de Ritz fue eliminada ya que las condiciones de contorno se satisfacen, ahora, en un número finito de puntos sobre el contorno.

El método de Ritz, tal como fue usado por Courant, es idéntico al M.E.F. el cual fue presentado algunos años después por Clough, a partir de ideas diferentes. En efecto, en 1960, Clough introdujo, por primera vez, el término elemento finito, en su trabajo “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”. En este trabajo se presentó el M.E.F. como una extensión de las técnicas de análisis estructural, en la solución de problemas de la mecánica del continuo.

La razón por la cual el M.E.F. tuvo una acogida, casi inmediata en 1960, está asociada al gran desarrollo, casi simultáneo, del computador digital, mediante el cual se logra efectuar la gran cantidad de operaciones que el M.E.F. demanda, en forma rápida y precisa. En 1943 Courant no contaba con esta poderosa herramienta de cálculo. A mediados de los años 60 los investigadores, tanto del campo de la mecánica del continuo, como del análisis estructural, supieron reconocer que la extensión del método de Ritz propuesta por Courant y el M.E.F. son, en esencia, idénticos. Este hecho trajo como consecuencia, en los siguientes años, un progreso impresionante de este método. Desde entonces el MEF se aplica, con éxito, en problemas tridimensionales, en problemas no lineales, en problemas no permanentes, y en problemas de muchas otras áreas distintas al análisis estructural tales: como, flujo de fluidos, transferencia de calor, análisis de campos eléctricos y magnéticos, robótica, ciencias médicas, etc. Lo que sigue fue obtenido de[12].

### 5.2.2. Descripción matemática del método

El desarrollo de un algoritmo de elementos finitos para resolver un problema definido mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno requiere en general cuatro etapas:

1. El problema debe reformularse en forma variacional.
2. El dominio de variables independientes (usualmente un dominio espacial para problemas dependientes del tiempo) debe dividirse mediante una partición en subdominios, llamados elementos finitos. Asociada a la partición anterior se construye un espacio vectorial de dimensión finita, llamado espacio de elementos finitos. Siendo la solución numérica aproximada obtenida por medio de una combinación lineal en dicho espacio vectorial.
3. Se obtiene la proyección del problema variacional original sobre el espacio de elementos finitos obtenido de la partición. Esto da lugar a un sistema con un número finito de ecuaciones, aunque en general con un número elevado de ecuaciones incógnitas. El número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido y, en general, cuanto mayor sea dicha dimensión tanto mejor será la aproximación numérica obtenida.
4. El último paso es el cálculo numérico de la solución del sistema de ecuaciones.

Los pasos anteriores permiten construir un problema de cálculo diferencial en un problema de álgebra lineal. Dicho problema en general se plantea sobre un espacio vectorial de dimensión no-finita, pero que puede resolverse aproximadamente encontrando una proyección sobre un subespacio de dimensión finita, y por tanto con un número finito de ecuaciones (aunque en general el número de ecuaciones será elevado típicamente de miles o incluso centenares de miles). La discretización en elementos



## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

finitos ayuda a construir un algoritmo de proyección sencillo, logrando además que la solución por el método de elementos finitos sea generalmente muy exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los elementos finitos. Para la resolución concreta del enorme sistema de ecuaciones algebraicas en general pueden usarse los métodos convencionales del álgebra lineal en espacios de dimensión finita aunque se obtiene mejores resultados con métodos iterativos.

En lo que sigue  $d$  es la dimensión del dominio,  $n$  el número de elementos finitos y  $N$  el número de nodos total.

### Formulación débil

La formulación débil de una ecuación diferencial permite convertir un problema de cálculo diferencial formulado en término de ecuaciones diferenciales en términos de un problema de álgebra lineal planteado sobre un espacio de Banach, generalmente de dimensión no finita, pero que puede ser aproximado por un sistema finito de ecuaciones algebraicas. Dada una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$\Phi(u) = f,$$

donde la solución es una cierta función definida sobre un dominio  $d$ -dimensional, y se han especificado un conjunto de condiciones de contorno adecuadas, puede suponerse que la función buscada es un elemento de un espacio de funciones o espacio de Banach  $V$ . Luego la ecuación es equivalente a:

$$A(u) = f,$$

donde

$$\begin{cases} u \in V, \\ f \in V, \\ A \in L(V, V'), \end{cases}$$

y  $V'$  el espacio dual de  $V$ . La forma variacional o débil se obtiene multiplicando la ecuación por  $v \in V$  e integrando sobre  $\Omega$ , entonces el problema se transforma en

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V, \end{cases}$$

donde:

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \text{ y} \\ L(v) = \int_{\Omega} f v$$

Cuando el operador lineal es un operador elíptico, el problema se puede plantear como un problema de minimización sobre el espacio de Banach.

### Discretización del dominio

Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  con una frontera continua en el sentido de Lipschitz una partición de  $\Omega$  en " $n$  elementos finitos", es una colección de  $n$  subdominios  $\{T_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$  que satisface:

1.  $\Omega = \bigcup_{k=1}^n T_k$
2.  $T_k$  es un conjunto compacto con una frontera de Lipschitz continua
3.  $\text{int}(T_k) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$  para  $k \neq j$ .

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

Usualmente por conveniencia práctica y sencillez de análisis, todos los "elementos finitos" tienen la misma forma, es decir, existe un dominio de referencia  $\tilde{T}$  y una colección de funciones biyectivas  $\{F_k : \tilde{T} \rightarrow T_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ . Este dominio de referencia se suele llamar frecuentemente también dominio isoparamétrico. En los análisis bidimensional el dominio de referencia se suele tomar como un triángulo equilátero o un cuadrado, mientras que en los análisis tridimensionales, el dominio de referencia típicamente es un tetraedro o un hexaedro. Además, sobre cada elemento se considerarán algunos puntos especiales, llamados nodos y que generalmente incluirán los vértices del elemento finito y se requerirá la condición adicional de que dos elementos adyacentes compartan los nodos o aristas.

Una vez definida la partición en elementos finitos, se define sobre cada elemento un espacio funcional de dimensión finita, usualmente formado por polinomios. Este espacio funcional servirá para aproximar localmente la solución del problema variacional. El problema variacional en su forma débil se plantea sobre un espacio de dimensión no finita, y por tanto la función buscada será una función de dicho espacio. El problema en esa forma exacta es computacionalmente inabordable, así que en la práctica se considerará un subespacio de dimensión finita del espacio vectorial original y en lugar de la solución exacta se calcula la proyección de la solución original sobre dicho subespacio vectorial de dimensión finita, es decir, se resolverá numéricamente el siguiente problema:

Sea  $V_h \subset V$  un subespacio de dimensión finita de  $V$

$$\begin{cases} \text{hallar } u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V \end{cases}$$

Luego  $u_h = P_{V_h}(u) \in V_h$  es la solución aproximada y  $P_{V_h} : V \rightarrow V_h$  es el proyector ortogonal del espacio original sobre el subespacio vectorial asociado a la discretización. Si la discretización es suficientemente fina y el espacio funcional finito

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

sobre cada elemento está bien escogido, la solución numérica obtenida aproximará razonablemente bien a la solución original. Eso implicará en general considerar un número muy elevado de elementos finitos y por tanto un subespacio de proyección de dimensión elevada. El error entre la solución exacta y la solución aproximada puede acotarse gracias al lema de Céa, que en esencia afirma que la solución exacta y la solución aproximada satisfacen:

$$\begin{cases} \exists c \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que} \\ \|u - u_h\|_V \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \end{cases} \quad (5.1)$$

Es decir, el error dependerá ante todo de lo bien que el subespacio vectorial asociado a la discretización en elementos finitos aproxime el espacio vectorial original.

### Funciones de forma y espacio de la solución

Existen muchas formas de elegir un conjunto de funciones que formen una base vectorial sobre la que aproximara la solución exacta del problema. Desde un punto de vista práctico resulta útil definir un espacio vectorial  $\widehat{X}$  de dimensión finita definido sobre el dominio  $V_h$  de referencia formado por todos los polinomios de grado igual o inferior a cierto grado  $P_n(\Omega) \subset \widehat{X}$ . Entonces mediante las aplicaciones que aplican el dominio de referencia a cada elemento finito, se define el espacio vectorial  $V_h = \left\{ v_h \in V \mid \forall k, v_h \circ F_k \in \widehat{X} \right\}$  que servirá para aproximar la solución

Cuando  $F_k$  es una función lineal y el espacio  $\widehat{X}$  está formado por polinomios entonces la restricción de  $v_h \in V$  es también un polinomio. El espacio vectorial  $\widehat{X}$  es un espacio polinómico en que la base de dicho espacio está formada por funciones de forma, que dado el conjunto de nodos del dominio de referencia se definen como:

$$\widehat{N}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

Esto permite definir de manera unívoca unas funciones de forma sobre el dominio real sobre el que se define el problema  $\forall a \in T_k \subset \Omega$ ,  $N_i(a) = N_i^k(a)$  Las funciones de forma permiten proyectar sobre el espacio de elementos finitos cualquier función definida sobre el dominio original mediante un operador de proyección.

### Resolución de las ecuaciones

Fijada una base asociada a una determinada discretización del dominio, como por ejemplo la dada por las funciones  $N_i(x)$ , la forma débil del problema (cuando la función  $a(.,.)$  es bilineal) puede escribirse como una ecuación matricial simple es decir, un sistema de ecuaciones  $Kx = b$ . Esta es la forma más común del sistema de ecuaciones de un problema de elementos asociado a una ecuación diferencial lineal, no dependiente del tiempo. Usualmente consta de miles o incluso de centenares de miles de ecuaciones que requieren algoritmos eficientes que optimicen el número de operaciones que debe realizarse y ahorren memoria. En general las complicaciones computacionales que deben resolverse en la resolución numérica son:

1. El cálculo de la matriz de coeficientes  $K = a_{i,j}$ , que requiere integración numérica aproximada, lo cual es una nueva fuente de errores en el cálculo por el M.E.F.
2. El uso de un método eficiente para resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

## 5.3. MODELO NUMÉRICO

### 5.3.1. Método de Newton para la ecuación tipo elíptico no lineal

Si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y  $w = h(u)$ , desafortunadamente la ecuación

CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

$$\langle F(\hat{w}), v \rangle = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

no puede ser utilizada para aproximar numéricamente su solución. Debemos utilizar la forma original, esto es,

$$\langle T(\hat{u}), v \rangle + \langle G(\hat{u}), v \rangle = L(v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definimos

$$\begin{cases} F : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,q}(\Omega) \\ u \longrightarrow \langle F(u), v \rangle, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle F(u), v \rangle &= \langle T(u) + G(u), v \rangle - L(v) \\ &= \int_{\Omega} k(u) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, u) v dx - \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

La derivada de Fréchet de  $F$  viene dada por

$$\begin{aligned} \langle DF(u)w, v \rangle &= \int_{\Omega} [k(u) \nabla w + k'(u) w \nabla u] \cdot \nabla v dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) w v dx, \quad \forall u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Para  $u = \hat{u}$  la solución de  $(PEF)$  o  $(PEM)$  se tiene que

$$\langle F(\hat{u}), v \rangle = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sea  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces

$$\langle F(\hat{u}, w) - F(\hat{u}, v) \rangle = \langle DF(\hat{u})w, v \rangle + \omega(\hat{u}, w),$$

donde  $\omega(v, w) \rightarrow 0$  cuando  $\|w\|_{1,p} \rightarrow 0$ .

Ponemos  $\hat{u} + w = u$  entonces  $w = u - \hat{u}$ , y

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

$$\langle F(u, v) \rangle = \langle DF(\hat{u})(u - \hat{u}), v \rangle + \omega(\hat{u}, w),$$

Para  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\|w\|_{1,p} \rightarrow 0$ ,  $\omega(\hat{u}, w)$  puede ser despreciado. Tenemos

$$\langle F(u), v \rangle = \langle DF(\hat{u})(u - \hat{u}), v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Puesto que  $\langle DF(\hat{u})u, v \rangle \geq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  se sigue que  $DF(\hat{u})$  es un operador invertible, en consecuencia

$$\begin{aligned} \langle DF(\hat{u})\hat{u}, v \rangle &= \langle DF(\hat{u})u, v \rangle - \langle F(u), v \rangle \\ DF(\hat{u})\hat{u} &= DF(\hat{u})u - F(u) \\ \hat{u} &= u - (DF(u))^{-1}F(u) \end{aligned}$$

para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\|\hat{u} - u\|_{1,p} \rightarrow 0$ , que es la formulación del método de Newton.

Para fines practico es más fácil resolver el problema lineal que hallar la inversa del operador por lo tanto la formulación del método de Newton es como se sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \text{ es culaquier funcion de } W_0^{1,p} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y \in W_0^{1,p} \text{ solución de} \\ \langle DF(u_n)(y), v \rangle = -\langle F(u_n), v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right. \\ u_{n+1} = y + u_n \end{array} \right.$$

### 5.3.2. Método de Newton y discretización espacial para la ecuación del tipo elíptico no lineal

Consideremos la ecuación:

$$\langle DF(\hat{u})(u - \hat{u}), v \rangle = -\langle F(u), v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

con  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\|\hat{u} - u\|_{1,p} \rightarrow 0$ .

Sea  $V_h \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  un subespacio de dimensión finita  $n$ , y sea  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  una base de  $V_h$ , donde  $h > 0$  es un parámetro que tiende a cero,  $V_h$  es un espacio tipo elementos finitos.

Consideramos el problema discreto siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{u}_h \in V_h \text{ solución de} \\ \langle DF(\hat{u}_h)(u_h - \hat{u}_h), v_h \rangle = -\langle F(\hat{u}_h), v \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Sea  $u_h^{(0)} = \sum_{i=1}^n u_i^{(0)} \varphi_i$  una aproximación de  $\hat{u}_h$ .

Para  $k = 0, 1, \dots$  definimos la sucesión  $(u_h^{(k)})$  como sigue

$$\begin{cases} u_h^{(0)} \text{ dado,} \\ \left\langle DF\left(u_h^{(k)}\right)\left(u_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}\right), v_h \right\rangle = -\left\langle F\left(u_h^{(k)}\right), v_h \right\rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

si denominamos

$$y = u_h^{(k+1)} - u_h^{(k)} = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle DF\left(u_h^{(k)}\right)y, v_h \right\rangle &= -\left\langle F\left(u_h^{(k)}\right), v_h \right\rangle \\ \sum_{i=1}^n y_i \left\langle DF\left(u_h^{(k)}\right)\varphi_i, v_h \right\rangle &= -\left\langle F\left(u_h^{(k)}\right), v_h \right\rangle \end{aligned}$$

Considerando que  $v_h = \varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , luego se expresa como:

$$\sum_{i=1}^n y_i \left\langle DF\left(u_h^{(k)}\right)\varphi_i, \varphi_j \right\rangle = -\left\langle F\left(u_h^{(k)}\right), \varphi_j \right\rangle$$



## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

La ecuación anterior corresponde al sistema de ecuaciones algebraicas

$$A^{(k)} \vec{Y} = \vec{b}^{(k)},$$

donde

$$A^{(k)} = \left( a_{ij}^{(k)} \right)_{n \times n},$$

$$\vec{b}^{(k)} = \left( b_1^{(k)}, \dots, b_n^{(k)} \right)^T \in \mathbb{R}^n,$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \left\langle DF \left( u_h^{(k)} \right) \varphi_i, \varphi_j \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} k \left( x, u_h^{(k)} \right) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial k \left( x, u_h^{(k)} \right)}{\partial y} \nabla u_h^{(k)} \cdot \nabla \varphi_j dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial g \left( x, u_h^{(k)} \right)}{\partial y} \varphi_i \varphi_j dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_j &= - \left\langle F \left( u_h^{(k)} \right) \varphi_j \right\rangle \\ &= - \int_{\Omega} k \left( x, u_h^{(k)} \right) \nabla u_h^{(n)} \cdot \nabla \varphi_j dx - \int_{\Omega} g \left( x, u_h^{(k)} \right) \varphi_j dx + \int_{\Omega} f \varphi_j dx. \end{aligned}$$

### Fórmula de integración

Sean  $P_1, P_j, P_k$  los vértices del triángulo  $T_k \in \tau$  con  $\tau = \{T_k/k = 0, 1 \dots NT\}$  (donde  $NT$  es número de triángulos de la malla), una triangulación tipo elementos finitos y sea  $P_{ij}, P_{ik}, P_{jk}$  sus puntos medios.

La integral de una función continua  $g(x, y)$  en un triángulo  $T_k$  se expresa como:

CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

$$\int_T g(x, y) dx dy \simeq \frac{\det(A_{T_K})}{6} (g(P_{ij}) + g(P_{ik}) + g(P_{jk})).$$

Sean  $u_i^{(k)}, u_j^{(k)}$  y  $u_k^{(k)}$  las soluciones de  $u_h^{(k)}$  en los punos  $P_i, P_j, P_k$  respectivamente correspondientes a la etapa  $(k)$ . Procedemos a calcular cada una de las integrales que aparecen en la definición de matriz  $A^{(k)}$  y del vector  $\vec{b}^{(k)}$ .

**Cálculo de la matriz  $A^{(k)}$**

1. Analizaremos la primera integral

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(k)} &= \int_{\Omega} k(u_h^{(k)}) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \\ &\simeq \frac{1}{6} \sum_{T_k \subset \text{Sup}(\varphi_i \cap \varphi_j)} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \det(A_{T_k}) \left[ k\left(P_{ij}, \frac{u_i^{(k)} + u_j^{(k)}}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. k\left(P_{jk}, \frac{u_j^{(k)} + u_k^{(k)}}{2}\right) + k\left(P_{ik}, \frac{u_i^{(k)} + u_k^{(k)}}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

2. La segunda integral se expresa como:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(k)} &= \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial k(x, u_h^{(k)})}{\partial y} \nabla u_h^{(k)} \cdot \nabla \varphi_j dx \\ &\simeq \frac{1}{12} \sum_{T_k \subset \text{Sup}(\varphi_i \cap \varphi_j)} \det(A_{T_k}) \left[ (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) u_i^{(k)} + (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) u_j^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) u_k^{(k)} \right]_T \times \left( \frac{1}{2} \frac{\partial k\left(P_{ij}, \frac{u_i^{(k)} + u_j^{(k)}}{2}\right)}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial k\left(P_{ik}, \frac{u_i^{(k)} + u_k^{(k)}}{2}\right)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

3. La tercera integral se expresa como:

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(k)} &= \int_{\Omega} \frac{\partial g(x, u_h^{(k)})}{\partial y} \varphi_i \varphi_j dx \\ &\simeq \frac{1}{24} \sum_{T_k \subset \text{Sop}(\varphi_i) \cap (\varphi_j)} \det(A_{T_k}) \frac{\partial g}{\partial y} \left( P_{ij}, \frac{u_i^{(k)} + u_k^{(k)}}{2} \right). \end{aligned}$$

### Cálculo del vector $\vec{b}^{(k)}$

1. Primera integral

$$\begin{aligned} h_j^{(k)} &= \int_{\Omega} k(x, u_h^{(k)}) \nabla u_h^{(k)} \cdot \nabla \varphi_j dx \\ &\simeq \frac{1}{6} \sum_{T_k \subset \text{Sop}(\varphi_i \cap \varphi_j)} \det(A_{T_k}) \left[ (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) u_i^{(k)} + (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) u_j^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + (\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j) u_j^{(k)} \right]_{T_k} \left[ k \left( P_{ij}, \frac{u_i^{(k)} + u_j^{(k)}}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. k \left( P_{ik}, \frac{u_i^{(k)} + u_k^{(k)}}{2} \right) + k \left( P_{jk}, \frac{u_j^{(k)} + u_k^{(k)}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

2. Segunda integral

$$\begin{aligned} l_j^{(k)} &= \int_{\Omega} g(x, u_h^{(k)}) \varphi_j dx \\ &\simeq \frac{1}{12} \sum_{T_k \subset \text{Sop}(\varphi_j)} \left\{ \det(A_{T_k}) \left[ g \left( P_{ij}, \frac{u_i^{(k)} + u_j^{(k)}}{2} \right) + g \left( P_{jk}, \frac{u_j^{(k)} + u_k^{(k)}}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

3. Tercera integral

$$q_j^{(k)} = \int_{\Omega} f \varphi_j dx \simeq \frac{1}{12} \sum \det(A_{T_k}) [f(P_{jk}) + f(P_{ij})].$$

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

Luego tenemos que los coeficientes de la matriz  $A^{(k)}$  y el vector  $\vec{b}^{(k)}$  son como se sigue:

$$\begin{aligned}a_{ij}^{(k)} &= c_{ij}^{(k)} + d_{ij}^{(k)} + e_{ij}^{(k)} \\b_j^{(k)} &= -\left(h_j^{(k)} + l_j^{(k)}\right) + q_j^{(k)}.\end{aligned}$$

Una vez calculados estos para la etapa  $k$  resolvemos el sistema de ecuaciones  $A^{(k)}U^{(k+1)} = \vec{b}^{(k)}$  cuya solución es  $U^{(k+1)}$ . Más precisamente procedemos de acuerdo al siguiente algoritmo:

ENTRADAS:

$\tau$  y  $N$  (Topología de la malla)

$u^{(0)}$  (solución inicial arbitraria)

máx (número máximo de iteraciones)

$tol$  (precisión con la que deseamos la solución)

PASOS

$k \leftarrow 0$

$S_0 \leftarrow u^{(0)}$

$S \leftarrow 0$

REPETIR

Calcular matriz  $A^{(k)}$  con información de  $S_0$

Calcular vector  $\vec{b}^{(k)}$  con información de  $S_0$

Resolver el sistema  $A^{(k)}S = \vec{b}^{(k)}$

$S_0 = S + S_0$

$k \leftarrow k + 1$

HASTA QUE  $(k < max)$  o  $(||S|| < tol)$

SALIDA:

Solución del problema  $S_0$ .

### 5.3.3. Discretización espacial y temporal de la ecuación del tipo parabólico no lineal

Sea  $V_h \subset W^{1,p}(\Omega)$  un subespacio de dimensión finita  $n$ ,  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  una base de  $V_h$ .

La formulación aproximada de  $(PPF)$  se establece del modo siguiente: para cada  $t \in [0, T]$ , hallar  $u_h(t) \in V_h$  solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para cada } t \in [0, T], \text{ hallar } u_h(t) \in V_h \text{ solución de} \\ \frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle + a(u_h(t), v_h) + b(u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle, \forall v_h \in V_h, \\ \langle u_h(0), v_h \rangle = \langle q, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (PA)$$

En primer lugar se realiza una discretización temporal para lo cual fijamos  $m \in \mathbb{N}$  que es el número de elementos temporales en que deseamos dividir el intervalo  $[0, T]$ , donde  $m > 0$ . Calculamos  $k_t = \frac{T}{m}$  que es la longitud de cada subintervalo, siendo  $t_j = jk_t$ , el nodo temporal  $j$  para  $j = 0, 1, \dots, m$ . La derivada  $\frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle$  en  $t = t_j$  se aproxima del modo siguiente

$$\frac{d}{dt} \langle u_h(t_j), v_h \rangle \simeq \left\langle \frac{u_h(t_{j+1}) - u_h(t_j)}{k_t}, v_h \right\rangle \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Sea  $\theta \in [0, 1]$ . El método  $\theta$  consiste en hallar  $u_h(t_{j+1}) \in V_h$  solución de

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_h(t_{j+1}) - u_h(t_j)}{k_t}, v_h \right\rangle + \theta a(u_h(t_j), v_h) &+ \\ (1 - \theta)a(u_h(t_{j+1}), v_h) + \theta b(u_h(t_j), v_h) &+ \\ (1 - \theta)b(u_h(t_{j+1}), v_h) &= \theta \langle f(t_j), v_h \rangle + (1 - \theta) \langle f(t_{j+1}), v_h \rangle \end{aligned}$$

Para  $\theta = \frac{1}{2}$ , (Crank-Nicolson) se obtiene

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

$$\begin{aligned}
 \langle u_h(t_{j+1})u_h \rangle + \frac{k_t}{2} a(u_h(t_{j+1}), v_h) &+ \\
 \frac{k_t}{2} b(u_h(t_{j+1}), v_h) &= \langle u_h(t_j)u_h \rangle - \frac{k_t}{2} a(u_h(t_j), v_h) \\
 &- \frac{k_t}{2} b(u_h(t_j), v_h) + \frac{k_t}{2} \langle f(t_j) + f(t_{j+1}), v_h \rangle
 \end{aligned}$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
 L_j(v_h) &= \langle u_h(t_j), v_h \rangle - \frac{k_t}{2} a(u_h(t_j), v_h) - \frac{k_t}{2} b(u_h(t_j), v_h) \\
 &+ \frac{k_t}{2} \langle f(t_j) + f(t_{j+1}), v_h \rangle, \forall v_h \in V_h,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \langle F(u_h(t_{j+1})), v_h \rangle &= \langle u_h(t_{j+1}), v_h \rangle + \frac{k_t}{2} a(u_h(t_{j+1}), v_h) \\
 &+ \frac{k_t}{2} b(u_h(t_{j+1}), v_h) - L_j(v_h), \forall v_h \in V_h
 \end{aligned}$$

Luego, nuestro problema toma la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{hallar } u_h(t_{j+1}) \in V_h \text{ solución de} \\ \langle F(u_h(t_{j+1})), v_h \rangle = 0, \forall v_h \in V_h \end{array} \right. .$$

Es claro que al aplicar el método de Crank-Nicolson a la ecuación parabólica el problema se transforma en la resolución iterativa del problema elíptico tratado anteriormente para cada tiempo  $t_j$  por lo que el algoritmo quedaría de la siguiente manera:

ENTRADAS:

$\tau$  y  $N$  (Topología de la malla)

$u(0) = u_0$  (solución inicial)

$u^{(0)}$  (solución inicial arbitraria)

$T$  (tiempo de simulación)

$m$  (número de divisiones para la discretización temporal)

máx (número máximo de iteraciones)

$tol$  (precisión con la que deseamos la solución)

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

PASOS

$$h_t \leftarrow \frac{T}{m}$$

$$t_0 \leftarrow 0$$

$$U_0 \leftarrow u_0$$

PARA  $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$

$$k \leftarrow 0$$

$$S_0 \leftarrow u^{(0)}$$

$$S \leftarrow 0$$

REPETIR

Calcular la matriz  $A^{(k)}(t_i)$  con información de  $S_0$  y  $U(t_i)$

Calcular el vector  $\vec{b}^{(k)}(t_i)$  con información de  $S_0$  y  $U(t_i)$

Resolver el sistema  $A^{(k)}(t_i)S = \vec{b}^{(k)}(t_i)$

$$S_0 = S + S_0$$

$$k \leftarrow k + 1$$

HASTA QUE  $(k < max)$  o  $(\|S\| < tol)$

$$U(t_{i+1}) \leftarrow S_0$$

FIN DEL PARA

SALIDA:

Solución del problema  $U$ .

De manera mas general el algoritmo queda como sigue:

ENTRADAS:

Funciones  $k(u), g(x, u), f(x, t), u_0(x)$

Derivadas  $k'(u), \frac{\partial g}{\partial y}$

mallla espacial

mallla temporal:  $T > 0$  y  $m$ .

Test: función  $u(x, t)$

## CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

Datos de salida:  $U_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  y  $u(x_j, T)$ , error

### 1. Inicialización

$$h_t = \frac{T}{m}, \quad t_k = kh_t \quad k = 0, 1, \dots, m$$

### 2. Cálculo de $U_k$ .

Para  $k = 1, \dots, m$

Si  $k = 1$ , calcular  $U_1$  como sigue

$$\vec{u}_0 = \left( u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)} \right) \quad \text{con } u_j^{(0)} = \int_{\Omega} g \varphi_j = \sum_T \int_T g \varphi_j dx$$

$$\vec{b}_0 = (b_1(0), \dots, b_n(0)) \quad \text{con } b_j(0) = \int_{\Omega} f(x, 0) \varphi_j = \sum_T \int_T f(x, 0) \varphi_j dx$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0$$

Para  $p = 1, \dots, M$

$$\vec{a}(0) = (a_1(0), \dots, a_n(0)) \quad \text{con } a_j(0) = B(\vec{u}, \varphi_j)$$

$$\begin{aligned} \vec{d}(0) &= (d_1(0), \dots, d_n(0)) \quad \text{con } d_j(0) = -\vec{u} - \frac{h}{2} \vec{a}(0) + \vec{u}_0 \\ &\quad + \frac{h}{2} \vec{b}(0) \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } a_{ij} = \langle DF(\vec{u}) \varphi_i, \varphi_j \rangle$$

$$\text{Resolver } A\vec{y} = \vec{d}(0)$$

Si  $\|\vec{y}\| < \varepsilon$  salir, caso contrario hacer

$$\vec{u} = \vec{y} + \vec{u}$$

$$\vec{u}_1 = u$$

Si  $k = 2, \dots, m$ , calcular  $U_k$  como sigue

$$\begin{aligned} \vec{b}(t_{k-1}) &= (b_1(t_{k-1}), \dots, b_n(t_{k-1})) \quad \text{con } b_j(t_{k-1}) = \int_{\Omega} f(x, t_{k-1}) \varphi_j dx \\ &= \sum_T \int_T f(x, t_{k-1}) \varphi_j dx \end{aligned}$$

$$\vec{a}(t_{k-1}) = (a_1(t_{k-1}), \dots, a_n(t_{k-1})) \quad \text{con } a_j(t_{k-1}) = B(\vec{u}_1, \varphi_j)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_1$$

Para  $p = 1, \dots, M$



CAPÍTULO 5. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS 2D

$$\vec{a}(t_{k-1}) = (a_1(t_{k-1}), \dots, a_h(t_{k-1})) \text{ con } a_j(t_{k-1}) = B(\vec{u}, \varphi_j)$$

$$\vec{d}(t_{k-1}) = (\vec{u}_1 + h\vec{b}(t_{k-1}) - \frac{h}{2}\vec{a}(t_{k-1}) - \vec{u} - \frac{h}{2}\vec{a}(t_h)$$

$$A = (a_{ij}) \text{ con } a_{ij} = \langle DF(\vec{u})\varphi_i, \varphi_j \rangle$$

$$\text{Resolver } A\vec{y} = \vec{d}(t_{k-1})$$

Si  $\|\vec{y}\| < \varepsilon$  salir, caso contrario hacer

$$\vec{u} = \vec{y} + \vec{u}$$

3. Presentar resultados:  $U_k, u(x_j, T)$ , error.

# CAPÍTULO 6

## IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

### 6.1. INTRODUCCIÓN

El programa computacional se ha desarrollado en el compilador Delphi XE2, una de las últimas versiones de Delphi. Se ha escogido este por la rapidez en la ejecución, su potencia y facilidad para programar, en comparación con otras alternativas como Matlab, así como por la facilidad que nos brinda al momento de representar gráficamente la solución numérica de la ecuación de Richards. En cuanto a la programación misma del método de elementos finitos, se ha usado el método de ensamblaje, computacionalmente implementado en una clase (programación orientada a objetos). En cuanto a la malla se ha usado un programa que se lo puede encontrar en el sitio "[http://web.mit.edu/easymesh\\_v1.4/www/easymesh.html](http://web.mit.edu/easymesh_v1.4/www/easymesh.html)", es un software libre hecho en código C++ capaz de mallar cualquier dominio convexo o no, e inclusive con hoyos, en cuanto a los resultados como no podía ser de otra manera se los ha representado de manera gráfica usando un componente para Delphi, el Mathimage que

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

usa tecnología OpenGL siendo capaz de realizar gráficas en dos y tres dimensiones“

### 6.2. MALLA

El mallador tiene como entrada un archivo texto con la extensión "xxxxx.d" donde se especifica el número de puntos de la región poligonal que corresponde al dominio  $\Omega$ , éstos se enumeran comenzando desde el 0 seguido del caracter ":". A continuación se ingresan dos decimales que corresponden a las coordenadas en  $x$  e  $y$  del punto, un número decimal que indica que tan fina es la malla alrededor de dicho punto y un número entero que especifica la condición de borde en nuestro caso se ha usado 1 para la condición de Neumann y 2 para la condición de Dirichlet, todos estos separados por espacios. A continuación se especifica el número de aristas de la región poligonal para luego enumerarlas comenzando así mismo con el 0 seguido del caracter ":" luego se especifica la arista con un par de números enteros que hacen referencia a los puntos cuyas coordenadas fueron puestas anteriormente para finalmente escribir otro número entero que hace referencia a la condición de borde en toda la arista. En la figura 6.1 se puede observar la estructura de dicho archivo:

Luego de esto se ejecuta el mallador con la instrucción " EasyMesh xxxxx.d +dxf " lo cual nos genera tres archivos tipo texto "xxxxx.n, xxxxx.e, y xxxxx.s" , con lo cual está completamente determinada la topología de la malla. El primero especifica el número de nodos de la malla así como también las coordenadas  $x$ ,  $y$  de dichos nodos enumerados desde el 0 y la condición de borde "mark", 0 si es nodo interior, caso contrario la condición que hayamos dado. La figura 6.2 muestra la estructura de este archivo:

El segundo "xxxxxx.e" es el archivo de elementos, que muestra primeramente el número de triángulos de la malla, así como también enumera cada uno de estos, para lo cual utiliza tres números enteros " i,j,k " que corresponden a los nodos

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

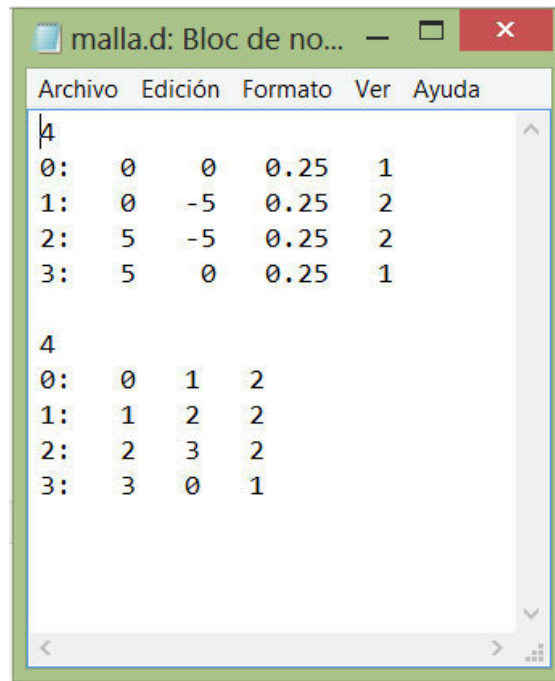


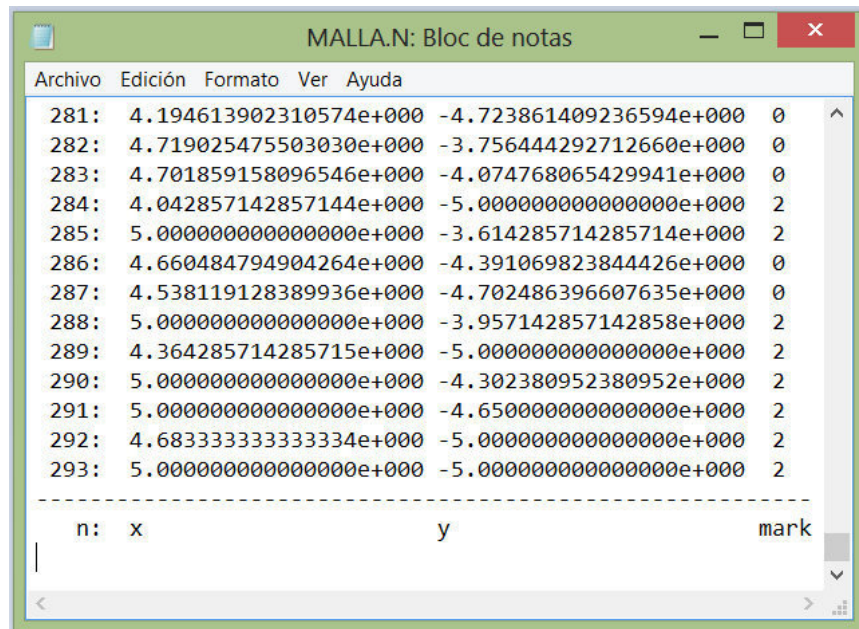
Figura 6.1: Archivo de entrada de la malla

del triángulo haciendo referencia al número de nodo del archivo anterior así como también se especifican sus tres triángulos vecinos "  $e_i, e_j, e_k$  " con la particularidad que si es -1 quiere decir que a ese lado el elemento no tiene vecino o sea es frontera tal como se muestra en la figura 6.3

También se listan las tres aristas del elemento "  $s_i, s_j, s_k$  " que hacen referencia al último archivo que es el de aristas, el cual no lo analizaremos puesto que no lo hemos usado en nuestro programa computacional, en la figura 6.4 mostramos parte del archivo de elementos donde se puede ver esta estructura.

Ya en el programa computacional, la malla se puede visualizar en la ventana según se muestra en la figura 6.5

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL



Archivo	Edición	Formato	Ver	Ayuda
281:	4.194613902310574e+000	-4.723861409236594e+000	0	
282:	4.719025475503030e+000	-3.756444292712660e+000	0	
283:	4.701859158096546e+000	-4.074768065429941e+000	0	
284:	4.042857142857144e+000	-5.000000000000000e+000	2	
285:	5.000000000000000e+000	-3.614285714285714e+000	2	
286:	4.660484794904264e+000	-4.391069823844426e+000	0	
287:	4.538119128389936e+000	-4.702486396607635e+000	0	
288:	5.000000000000000e+000	-3.957142857142858e+000	2	
289:	4.364285714285715e+000	-5.000000000000000e+000	2	
290:	5.000000000000000e+000	-4.302380952380952e+000	2	
291:	5.000000000000000e+000	-4.650000000000000e+000	2	
292:	4.683333333333334e+000	-5.000000000000000e+000	2	
293:	5.000000000000000e+000	-5.000000000000000e+000	2	

n:	x	y	mark
----	---	---	------

Figura 6.2: Archivo de nodos

### 6.3. PROGRAMACIÓN DEL M.E.F. PARA LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Para la programación del modelo numérico he preferido desarrollar previamente una clase con el fin de usar toda la potencia de la programación orientada a objetos.

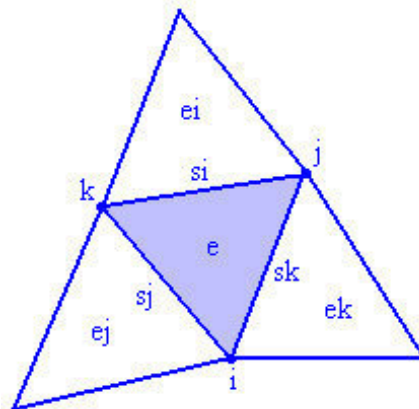


Figura 6.3: Explicación archivo de elementos

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Figura 6.4 shows a screenshot of a text editor window titled "MALLA.E: Bloc de notas". The window contains a table of element data. The table has 11 columns: a label column (e.g., 515:, 516:, etc.), and ten numerical columns. The data is organized into 11 rows, each representing an element. Below the table, there is a dashed line followed by a row of labels: e:, i, j, k, ei, ej, ek, si, sj, sk. The window also features a menu bar with "Archivo", "Edición", "Formato", "Ver", and "Ayuda", and a scrollbar on the right side.

	280	287	286	521	510	513	807	796	798
515:	280	287	286	521	510	513	807	796	798
516:	281	284	289	-1	518	507	804	801	795
517:	282	288	285	-1	511	514	805	797	802
518:	281	289	287	523	513	516	808	799	801
519:	286	290	283	520	512	522	806	800	809
520:	283	290	288	-1	514	519	812	803	806
521:	291	286	287	515	524	522	807	811	810
522:	291	290	286	519	521	-1	809	810	815
523:	287	289	292	-1	524	518	814	813	808
524:	287	292	291	525	521	523	816	811	813
525:	291	292	293	-1	-1	524	818	817	816

e: i, j, k, ei, ej, ek, si, sj, sk

Figura 6.4: Archivo de elementos

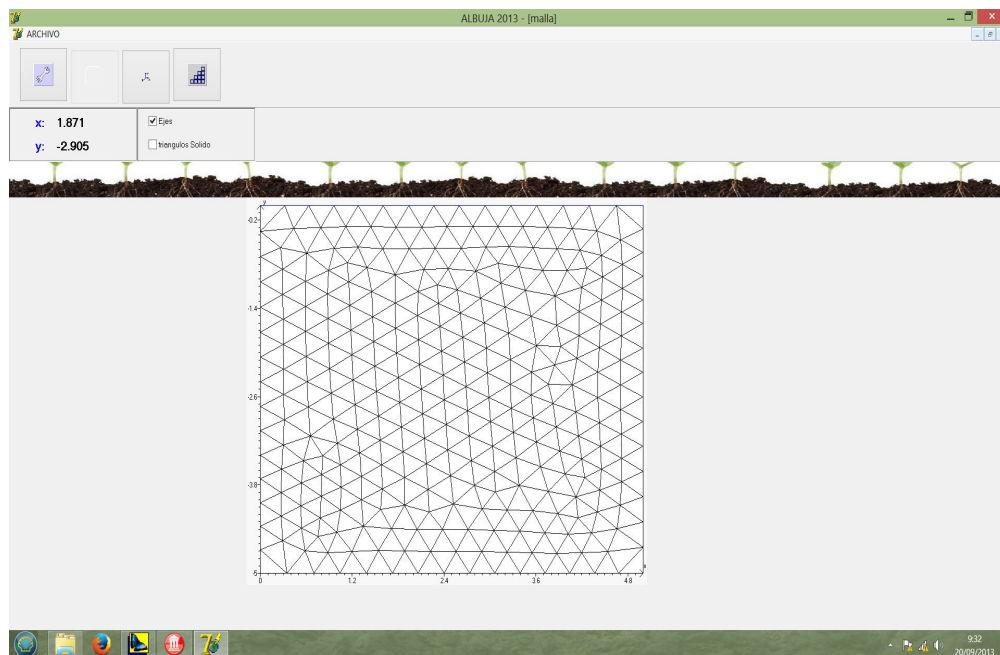


Figura 6.5: Gráfico de la malla

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Los objetos de esta clase son capaces de resolver el problema lineal para lo cual construyen la matriz A y el vector B usando la topología de la malla y la información de todas las funciones que intervienen en el problema, además resuelven el sistema de ecuaciones lineales  $AX = B$  obteniendo la solución numérica del problema, con el uso de un objeto de esta clase se resuelve la ecuación de Richards ya que el método de Newton para el problema no lineal consiste en linealizar el problema y resolverlo iterativamente como ya se ha visto. En cuanto al problema evolutivo, usando Crank Nicolson, el problema se transforma en resolver el problema anterior en cada paso temporal por lo tanto esta clase será nuestro punto de partida para resolver el problema. La clase consta de las propiedades y métodos que se especifican en el diagrama UML de la figura 6.6

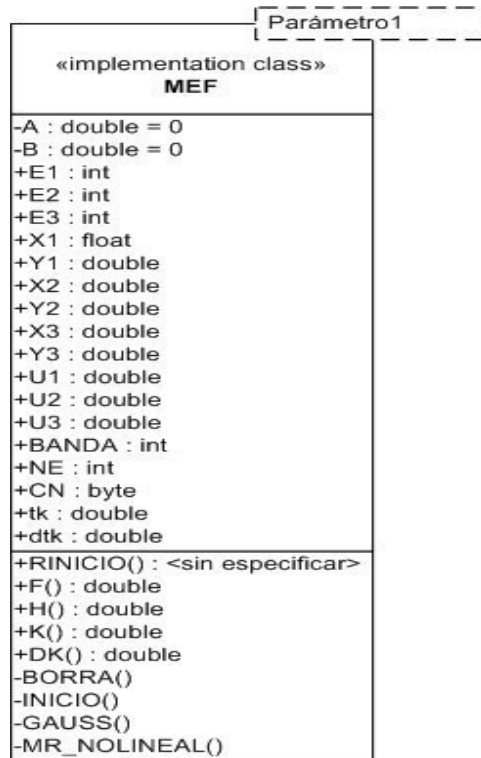


Figura 6.6: Clase elemento finito

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

El método más importante de todos es el que ensambla la matriz A, es por esta razón que escribiremos el algoritmo a continuación

```
SI E1 ≥ 0 ENTONCES
    A[E1,E1] ← A[E1,E1] + FD;
    B[E1] ← B[E1] + FDB;
    SI E2 ≥ 0 ENTONCES
        A[E1,E2] ← A[E1,E2] + FD;
        A[E2,E1] ← A[E1,E2];
    FIN DEL SI
    SI E3 ≥ 0 ENTONCES
        A[E1,E3] ← A[E1,E3] + FD;
        A[E3,E1] ← A[E1,E3];
    FIN DEL SI
FIN DEL SI;
SI E2 ≥ 0 ENTONCES
    A[E2,E2] ← A[E2,E2] + FD;
    B[E2] ← B[E2] + FDB;
    SI E3 ≥ 0 ENTONCES
        A[E2,E3] ← A[E2,E3] + FD;
        A[E3,E2] ← A[E2,E3];
    FIN DEL SI
FIN DEL SI
SI E3 ≥ 0 ENTONCES
    A[E3,E3] ← A[E3,E3] + FD;
    B[E3] ← B[E3] + FDB;
FIN DEL SI
```

En la figura 6.7 presentamos la pantalla del programa computacional que ejecuta



## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

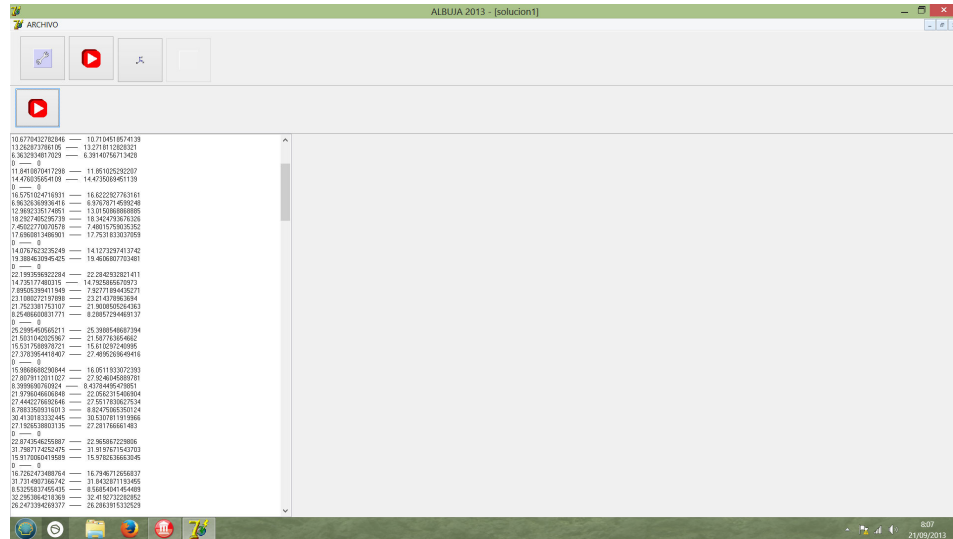


Figura 6.7: Ejecucion del programa computacional

esta parte del programa resolviendo la ecuación de Richards bidimensional, además se presenta en un cuadro de texto las soluciones aproximadas y exactas en los nodos de la malla para lo cual se ha usado un problema cuya solución se conocera más adelante. Usaremos este mismo ejemplo con el fin de validar el modelo numérico y computacional.

### 6.4. VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS

El programa computacional tiene dos maneras de visualizar los resultados, para lo cual se ha usado un componente que permite graficar en dos y tres dimensiones. La primera visualización muestra el resultado en tres dimensiones, es decir usa la malla para graficar la función resultante, logicamente como es un problema evolutivo dicha función va cambiando en el tiempo lo cual nos da una buena idea de como evoluciona el fenómeno; en las presentamos algunas pantallas del programa donde se

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

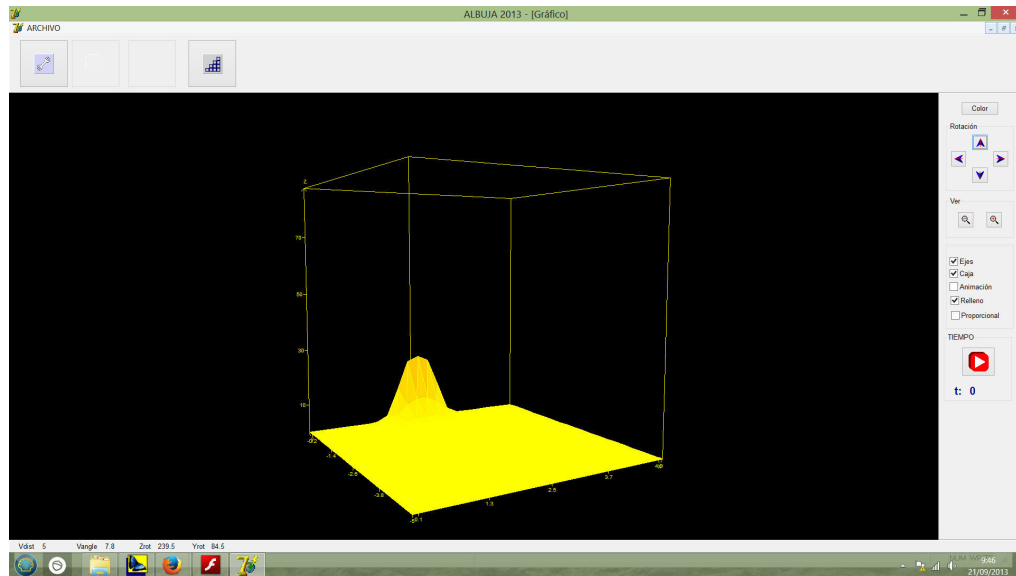


Figura 6.8: Visualización de resultados  $t=0$

puede apreciar esta evolución en las figuras 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, y 6.12

La segunda forma de visualización es en dos dimensiones, es decir a cada posición  $x,y$  del plano le corresponde un código de colores que varía de amarillo que significa " $u(x,y) = 0$ " hasta rojo intenso en donde la función toma los valores más altos, en el caso del fenómeno de infiltración de agua en el suelo se puede observar en un corte transversal como el fluido va poco a poco ingresando en el suelo, a continuación presentamos algunas pantallas de este tipo de visualización en las figuras 6.13,6.14, y 6.15

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

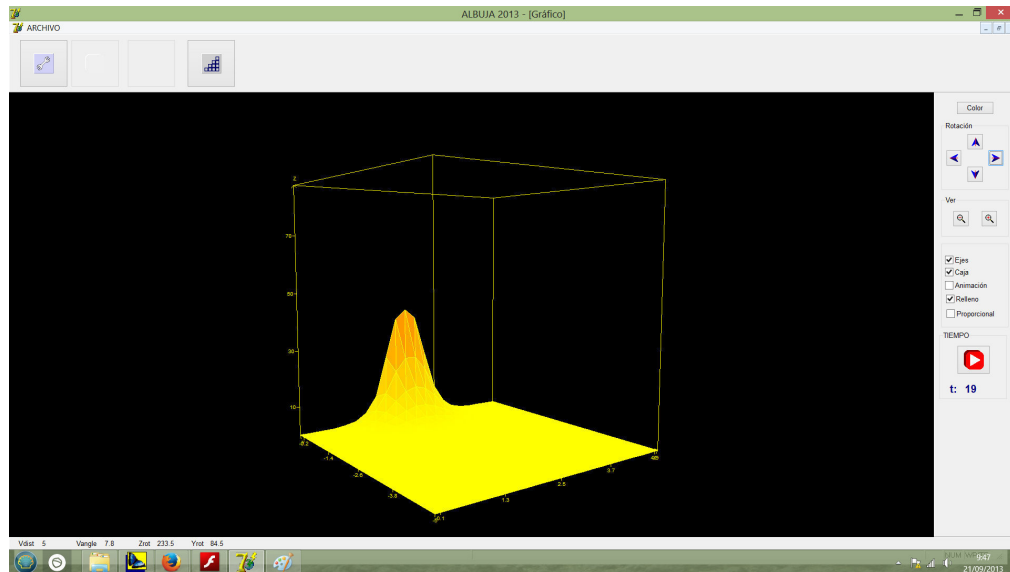


Figura 6.9: Visualización de resultados  $t=19$

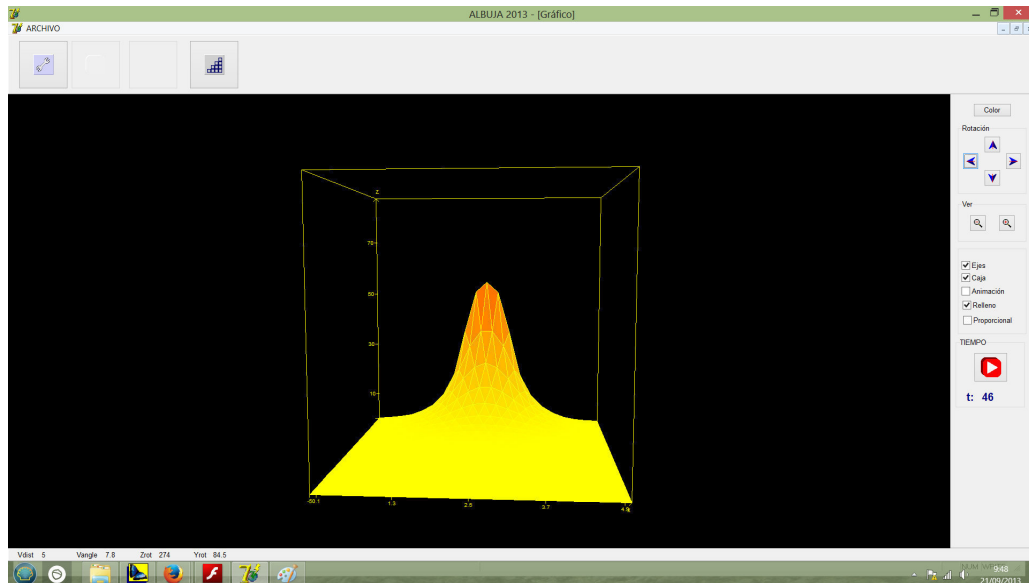


Figura 6.10: Visualización de resultados  $t=46$

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

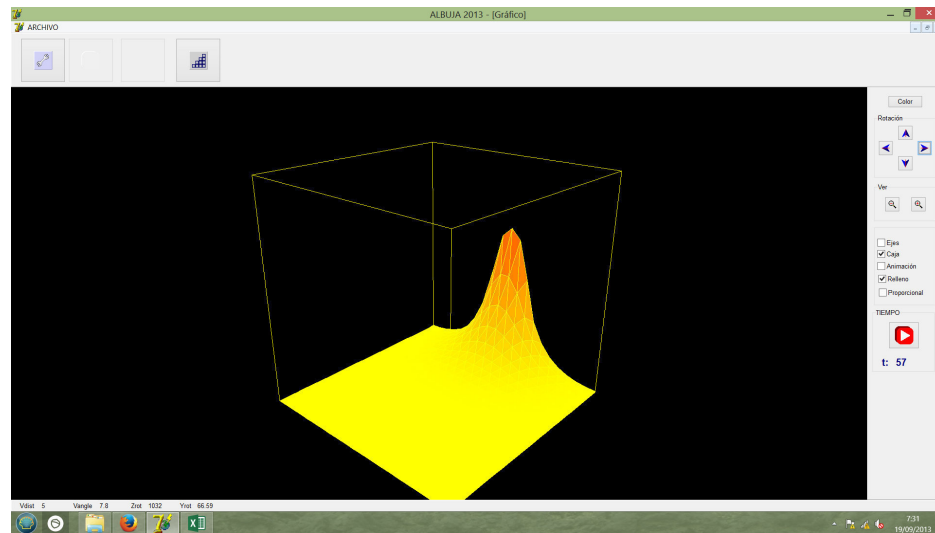


Figura 6.11: Visualización de resultados  $t=57$

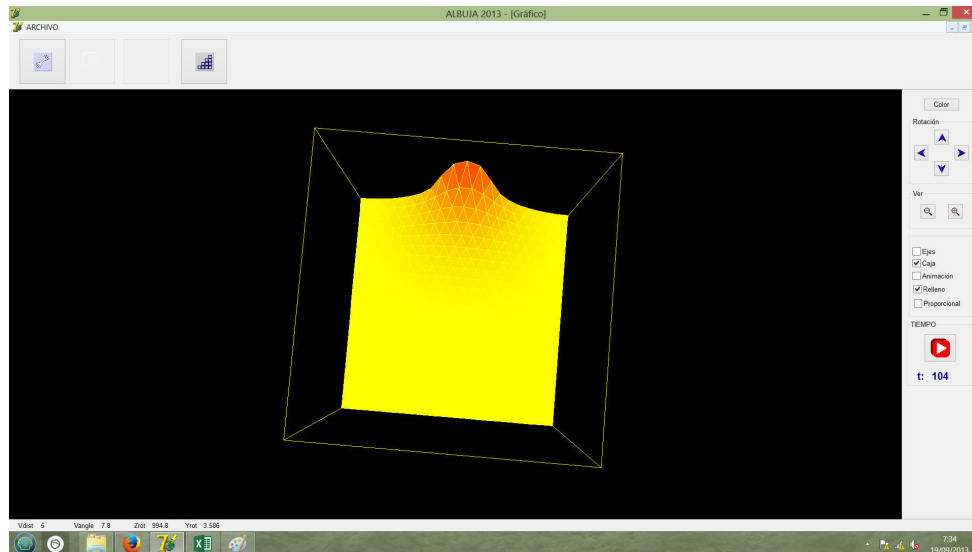


Figura 6.12: Visualización de resultados  $t=104$

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL



Figura 6.13: Visualización de resultados 2D  $t=5$

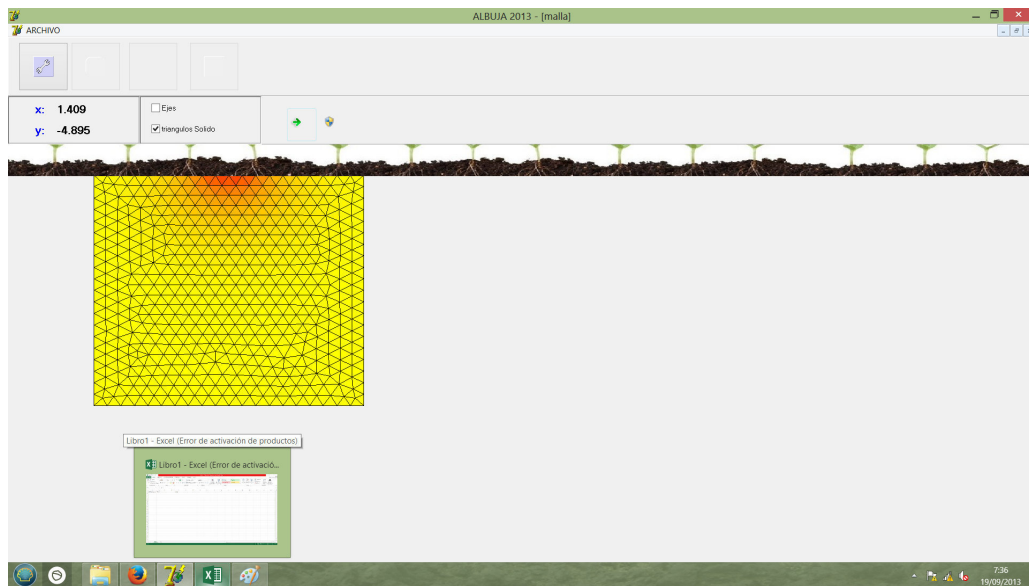


Figura 6.14: Visualización de resultados 2D  $t=40$

## CAPÍTULO 6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

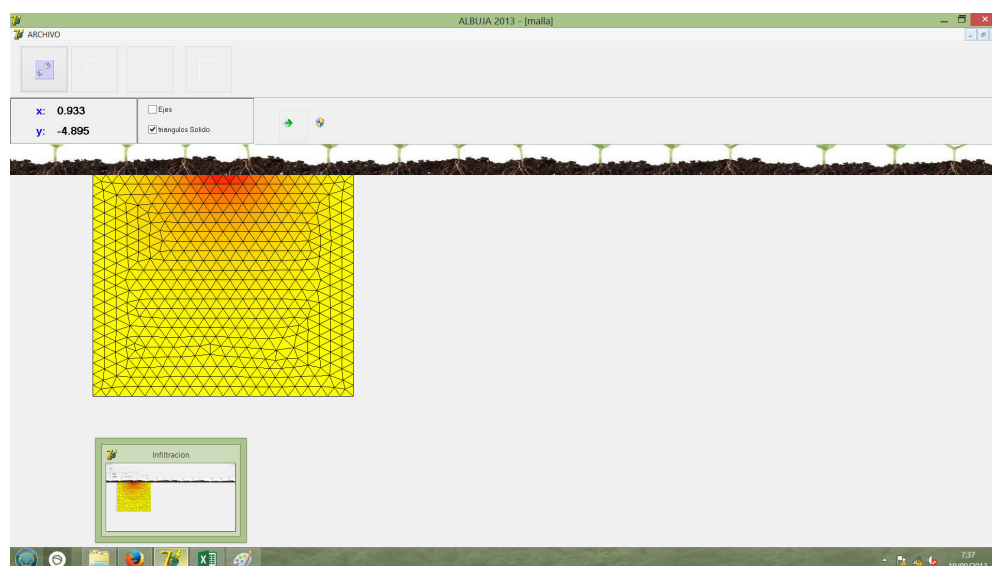


Figura 6.15: Visualización de resultados 2D  $t=60$

# CAPÍTULO 7

## RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo vamos a tomar un ejemplo particular de la ecuación de Richards, es decir fijamos todas las funciones involucradas en el problema. Tomamos, una función  $u$  que cumpla con las condiciones de frontera y condiciones iniciales y reemplazamos en la ecuación para obtener la función  $f$ , con lo cual hemos construido un ejemplo particular de ecuación de Richards cuya solución  $u$  se conoce. Usaremos este problema para validar el programa computacional y obtener algunos resultados numéricos.

En primer lugar dejamos constante el tiempo y variamos el número de elementos (triángulos) de la discretización espacial y calculamos el error con la norma de  $L^1(\Omega)$  para lo cual integramos en valor absoluto la diferencia de la solución exacta y aproximada sobre cada triángulo y luego las sumamos, con lo cual se obtiene una muy buena aproximación de esta norma. Así mismo se registra el tiempo que se demora el computadora en realizar los cálculos, y finalmente se registran los resultados en la siguiente tabla

En esta tabla podemos apreciar que a medida que aumenta en número de elementos de la malla el error disminuye considerablemente por lo que parecería ser

## CAPÍTULO 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

	# DE ELEMENTOS	$\ u_h - u\ _{L^1(\Omega)}$	TIEMPO [s]
1	228	43.78	0.281
2	236	36.60	0.313
3	334	34.49	0.438
4	395	30.89	0.61
5	526	27.00	0.922
6	670	24.89	1.437
7	924	20.94	2.922
8	1468	16.58	9.657
9	2694	12.56	54.75
10	5790	8.75	551.171

Cuadro 7.1: Resultados numéricos

que la solución consiste en aumentar el número de triángulos, pero si miramos el tiempo de cálculo este crece de forma desmesurada por lo que el tiempo necesario para realizar una sola simulación de un problema real en una computadora core i7 sería considerablemente grande, lo que teóricamente correcto gracias al lema de Ceá (5,1). A continuación se presenta dos gráficas, en la primera figura 7.1 se considera el número de elementos versus el error, mientras en la segunda se grafica figura 7.2 el número de elementos versus el tiempo empleado para el cálculo en segundos.

La segunda prueba numérica es para ver la convergencia del método de Newton, para lo cual usamos la ecuación de Richards tipo elíptico no lineal y evaluamos la diferencia existente entre la solución numérica en el paso  $k$  " $u_h^k$ " y la solución numérica en el paso  $k-1$  " $u_h^{k-1}$ " los resultados obtenidos se presentan en la tabla 7.2

A continuación se presenta en la figura 7.3 una gráfica de estos mismos datos. Tanto en la tabla como en la gráfica se pueden apreciar que para nuestro caso particular el método de Newton converge casi de inmediato, es así que se podría decir que con la tercera o cuarta iteración es más que suficiente.



## CAPÍTULO 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

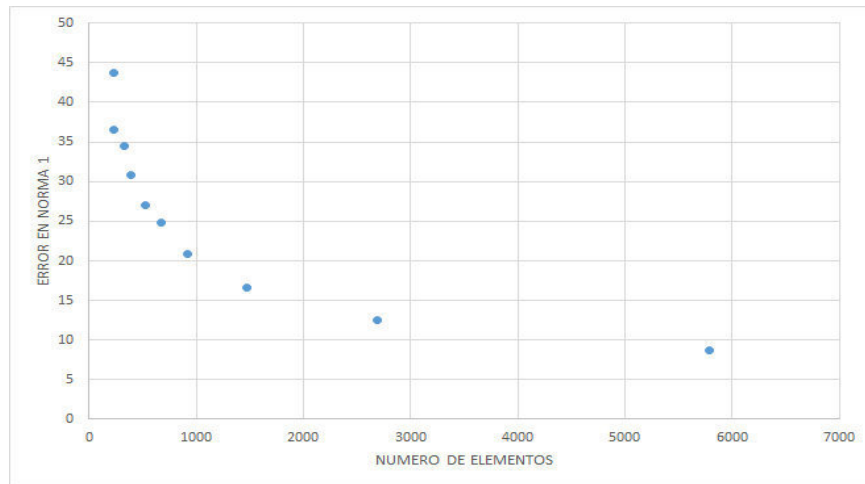


Figura 7.1: Número de elementos versus error en norma 1

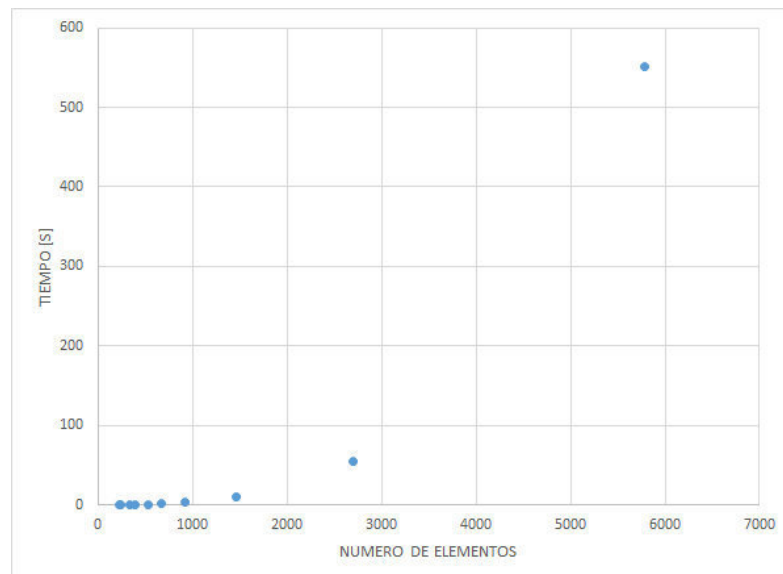


Figura 7.2: Número de elementos versus tiempo en seg

## CAPÍTULO 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

# ITERACIÓN	$\ u_h^k - u_h^{k-1}\ _{L^1(\Omega)}$
1	13.0823809
2	0.404999446
3	0.02649196
4	0.004819924
5	0.000354943
6	8.24E-05
7	5.68E-06

Cuadro 7.2: Convergencia del método de Newton

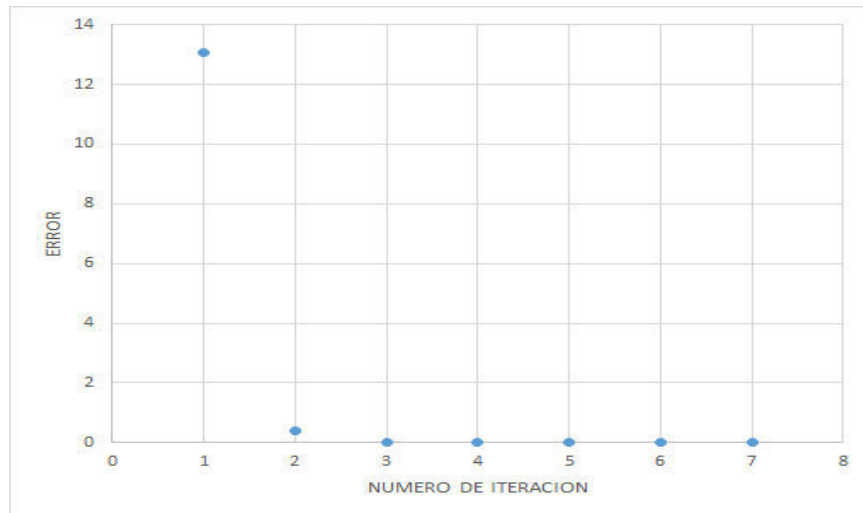


Figura 7.3: Número de iteración versus error (método de Newton)

# CAPÍTULO 8

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 8.1. CONCLUSIONES

- Es posible demostrar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Richards tanto para el problema tipo elíptico como para el problema tipo parabólico cuando las funciones involucradas cumplen con ciertas características descritas en el capítulo 4 sección 3 de esta tesis
- Para resolver numéricamente la ecuación de Richards bidimensional usando el método de elementos finitos, se debe usar primeramente el método de Crank Nicolson en la variable temporal para lo cual se realiza una discretización en el tiempo luego se linealiza la ecuación resultante usando el método Newton para finalmente discretizar la variable espacial y de esta manera se consigue el esquema numérico que posteriormente se transforma en un programa computacional.

## CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Para realizar pruebas con el simulador se usó un problema cuya solución se conocía de antemano, Aquí se pudo determinar que dejando fijo el tiempo y variando el número de elementos de la malla, el error en norma  $L^1(\Omega)$  disminuye considerablemente conforme aumenta el número de triángulos de la discretización espacial pero, así mismo el tiempo empleado por el computador aumenta considerablemente al aumentar el número de elementos.
- Para el problema específico usado se pudo observar que el método de Newton converge de forma muy rápida, en la tercera iteración
- Como era de esperarse la discretización temporal también influye en la calidad de la solución obtenida, pero así mismo si es demasiado fina el tiempo de cálculo se puede hacer demasiado grande.
- Una de las principales causas del tiempo que el computador demora en resolver la ecuación de Richards y así mismo fuente de errores numéricos es la solución del sistema de ecuaciones
- La ley de Darcy que data de 1856 , es una ley que tiene muchas limitaciones por lo cual para un problema real puede ser causa de un error mayor al introducido por la aproximación numérica de la solución.

### 8.2. RECOMENDACIONES

- Realizar un estudio más profundo en espacios funcionales más generales con el fin de ver la posibilidad de debilitar aún más las condiciones que deben cumplir las funciones involucradas en el problema de manera que la ecuación de Richards tenga solución única
- Investigar sobre la posibilidad de reformular la ley de Darcy y así obtener nuevas

## *CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES*

ecuaciones diferenciales, nuevos modelos matemáticos, numéricos y computacionales que puedan representar de mejor manera un problema real

- Diseñar algoritmos de programación paralela de modo que muchas instrucciones se ejecuten al mismo tiempo con lo cual se conseguirá minimizar el error en un tiempo razonable de máquina
- Investigar sobre nuevos métodos numéricos de resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales así como mejorar los existentes a fin de acortar el tiempo de ejecución de la simulación
- Investigar cual sería el número de elementos óptimo para conseguir una solución razonable en el menor tiempo.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GONZALES DE VALLEJO Luis I. FERRER Mercedes FERRER, ORTUNO Luis *Ingenieria Geologica* Pearson Educacion-Madrid 2002
2. F.G.H. BLYTH, M.H. FREITAS *Geología Para Ingenieros* Compañia Editorial Continental,Mexico 2001
3. BENALCÁZAR Gomez Hernán *Introducción a la modelización matemática y simulación numérica* notas del curso dictado en la Maestría en Matemáticas Puras y Aplicadas Quito junio de 2011
4. BENALCÁZAR Gomez Hernán *Modelizacion y Simulacion* Universidad Central del Ecuador Quito,1994
5. ALBUJA Guillermo, NAULA Ivan *Modelos Matematicos de Contaminacion del Aire* Universidad Central del Ecuador Quito, 2001
6. GOMEZ José D. Martin *Análisis Funcional y Optimización* Universidad de Chile-2006
7. SAYAS Francisco Javier. *Modelos Matemáticos en Mecánica* Departamento de Matematica Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2007
8. BREZIS H. , *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

9. EVANS L. C. , *Partial differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
10. O. C. ZIENKIEWZ, *The Finite Element Method*, tercera edición, McGraw-Hill, London, 1977.
11. MARINOSCHI Gabriela, *Functional Approach to Nonlinear Models of Water Flow in Soils*, Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics, Romanian Academy, Bucharest, Romania Published by Springer 2012.
12. WIKIPEDIA, Método de los elementos finitos [http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos) Consultado el: 03-05-2013 .
13. DEPARTAMENTO DE EDAFOLOGÍA Y QUÍMICA AGRÍCOLA, Universidad de Granada. España, Propiedades Físicas, <http://edafologia.ugr.es/introeda/tema04/text.htm>, Consultado el: 10-02-2013
14. METED, infiltración en suelos agrícolas, [https:// www. meted. ucar. edu /index\\_es.php](https://www.meted.ucar.edu/index_es.php), Consultado el: 03-05-2013
15. ASTROMIA, Tipos De Suelo, [http://www. astromia.com /tierraluna/ suelos.htm](http://www.astromia.com/tierraluna/suelos.htm), Consultado el: 15-04-2013.
16. BOTÁNICAL ONLINE, Tipos De Suelo, [http://www .botanical - online .com/ tiposdesuelo .htm](http://www.botanical-online.com/tiposdesuelo.htm), Consultado el: 16-04-2013
17. ANADÓN Ricardo, FERNÁNDEZ Consolación Características, Origen y Tipos de Suelo Universidad de Oviedo [http:// www .unioviado.es /chely /CHELY /docencia /Lecciones /Suelos .%20Lec%206.pdf](http://www.unioviado.es/chely/CHELY/docencia/Lecciones/Suelos.%20Lec%206.pdf), Consultado el: 15-04-2013.
18. CALOZ Gabriel, RAPPAPAZ Jacques, *Numerical Analysis for Nonlinear and Bifurcation Problems*, Preprinter, Editorial North-Holland, Amsterdam, 1994.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

19. MOROSANU Gheorghe , *Nonlinear Evolution Equations*, Editorial D. Reidel Publishing Company Bucarest, 1988.
20. BENALCÁZAR Hernán , *Estimations d'erreurs a posteriori et maillages adaptatifs pour des problèmes stationnaires et évolutifs*, Tesis No. 1594,1997, Escuela Politécnica Federal de Lausann Sausana, Suiza.
21. TAYLOR Michael E., *Partial Differential Equations III*, Editorial Springer-Verlag, Berlín, 1996
22. BATCHELOR G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, 2da edición, 1982.
23. BATCHELOR G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2da edición, 2000.
24. MADAY YVON RAPETTI Franscesca BERNARDI, Christine, *Discretisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Vol. 45 de *Mathématiques et Applications*, Springer Verlag, 2004.
25. SCOTT L. R. y BRENNER S. C. , *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New-York, 1994.
26. FORTIN M. y BREZZI F., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
27. CANDEL S. , *Mécanique des Fluides*, Dunod, 1990.
28. GLOWINSKI R., LIONS J.L. y CIARLET P.G , *Numerical methods of fluids (parte 3)*, North-Holland, 2003.
29. CIARLET P. G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Publishing Co., Amsterdam, 1978. *Studies in Mathematics and its Application*, Vol.4.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

30. FOIAS C. y CONSTANTIN P., *Navier-Stokes Equations (Chicago Lectures in Mathematics Series)*, University of Chicago Pres, 1988.
31. DARROZES J. S., *Mécanique Des Fluides Incompressibles*, Springer Verlag, 1982.
32. TAUZOT G. y DHATT G. , *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Librairie Maline, Paris, 1981. Collection Université de Compiègne.
33. DUVAUT G. , *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
34. GUERMOND J. L. y ERN A., *Eléments finis: théorie, applications, mise en œuvre*, Vol. 36 de *Mathématiques & Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
35. EUVRARD D. , *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.
36. GALDI G. P. , *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, Vol. 1 y 2, Springer, 1994.
37. RAVIART P. A. y GIRAULT V., *Finite element methods for Navir-Stokes equations*, Vol. 5 de *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
38. VAN LOAN C. y GOLUB G. H. , *Matrix Computations* The John Hopkins University Press, 1989.
39. SUMARIN A. , GOOSSENS M. y MITTELBAACH F. , *The LaTeX companion*, Addison -Wesley Pub. Co., 1993.
40. KRESS R. , *Numerical Analysis*, No. 81 de Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

41. LADYZHENSKAYA O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, 1969.
42. LADYZHENSKAYA O. A. , *The Boundary Value Problem of Mathematical Physics* Springer - Verlag, New York Berlin Hidelberg Tokyo, 1985.
43. LIPCHITZ E. y LANDAU L. , *Physique Théorique, Mécanique des fluides*, Vol. 6, 2da edicion, 1989.
44. LANGTANGEN H. P. , *Computational Partial Differential Equations*, Vol. 1 de *Texts in Computational Science and Engineering*, Springer-Verlag, 2da edición, 2003.
45. LIMAYE B. V. , *Funtional Analysis*, New Age International Limited, Bombay, 2da edición, 1996.
46. LIONS P. L., *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Incompressible Models*, Vol. 1 de *Oxford lectures series in mathematics and its applications*, Oxford Unity Press, 1996.
47. LIONS P. L. , *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Compressible Models*, Vol. 2 de *Oxford lectures series in mathematics and its applications*, Oxford Unity Press, 1998.
48. TAYLOR T. D. y PEYRET R. , *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer - Verlag, 1982.
49. THOMAS J. M. y RAVIART P. A. , *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection Mathématiques Appliqués pour la Maitrise, Masson, Paris, 1983.
50. SAATDJIAN E. , *Phénomène de transport et leurs résolution numériques*, Polytechnica, Paris, 1993.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

51. SELVADURAI A. P. S. , *Partial Differential Equations in Mechanics*, Springer Verlag, 2000.
52. TEMAM R. , *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, 1984.
53. VARGA R. S. , *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1962.

## **BIOGRAFÍA**

Guillermo Albuja Proaño nació en la ciudad de Machachi un 12 de junio, sus estudios primarios los realizó en su ciudad natal en la escuela fiscal José Mejía Lequerica, posteriormente se traslada a la ciudad de Quito donde realiza sus estudios secundarios en el Colegio Nacional Juan Pío Montúfar continuando sus estudios en la Universidad Central Del Ecuador donde obtiene los títulos de Ingeniero Matemático e Ingeniero Informático. En el año 2001 ingresa como docente en la ESPE y posteriormente en la Universidad Central donde actualmente trabaja